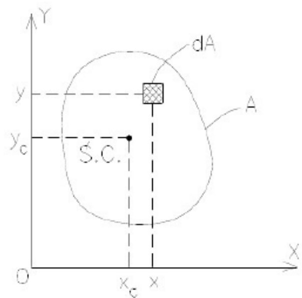
MOMENTY BEZWŁADNOŚCI FIGUR PŁASKICH

Przekroje poprzeczne prętów, wałów i belek – figury płaskie, charakteryzujące się następującymi parametrami:

- – polem powierzchni przekroju [mm^2, cm^2, m^2],
- – momentami statycznymi [cm^3, m^3],
- – momentami bezwładności [cm^4, m^4].



Definicja momentu statycznego

Definicja momentu statycznego w w układzie osi X i Y:

$$\boxed{S_x = \int_A y\,dA,\ S_y = \int_A x\,dA}$$

W zależności od położenia przekroju względem osi układu współrzędnych **mogą przyjmować wartości dodatnie i ujemne**.

Wykorzystując znane ze statyki pojęcie środka sił, dla środka ciężkości można napisać:

$$S_x = y_c A, \qquad S_y = x_c A.$$

Korzystając z tych zależności, współrzędne środka ciężkości figury płaskiej można obliczyć ze wzoru:

$$\boxed{x_c = \frac{S_y}{A}, \quad y_c = \frac{S_x}{A}.}$$

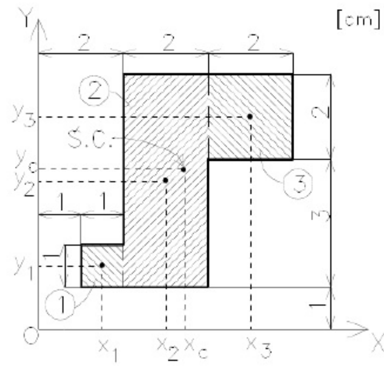
Środek ciężkości przekrojów złożonych –podział przekroju na figury proste.

$$\boxed{x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}, \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i},}$$

A_i – pola powierzchni figur prostych, x_i, y_i – współrzędne środków ciężkości poszczególnych figur prostych.

PRZYKŁAD

Określić położenie środka ciężkości figury przedstawionej na rysunku.

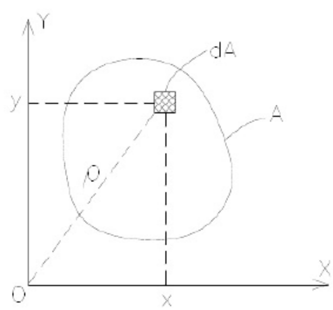


Przekrój podzielono na trzy prostokąty o następujących polach powierzchni:
$A_1 = 1 \cdot 1 = 1\ cm^2$,
$A_2 = 2 \cdot 5 = 10\ cm^2$,
$A_3 = 2 \cdot 2 = 4\ cm^2$.
Współrzędne środka ciężkości całej figury wynoszą

$$x_c = \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{1 \cdot 1{,}5 + 10 \cdot 3 + 4 \cdot 5}{1 + 10 + 4} = 3{,}43\ \text{cm},$$

$$y_c = \frac{A_1y_1 + A_2y_2 + A_3y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{1 \cdot 1{,}5 + 10 \cdot 3{,}5 + 4 \cdot 5}{1 + 10 + 4} = 3{,}77\ \text{cm}.$$

Momenty bezwładności



Definicja momentów bezwładności:

– osiowe momenty bezwładności

$$\boxed{J_x = \int_A y^2 dA,\ J_y = \int_A x^2 dA,}$$

– biegunowy moment bezwładności

$$\boxed{J_0 = \int_A \rho^2 dA = \int_A \left(x^2 + y^2\right) dA = J_x + J_y,}$$

– moment dewiacyjny (zboczenia, odśrodkowy)

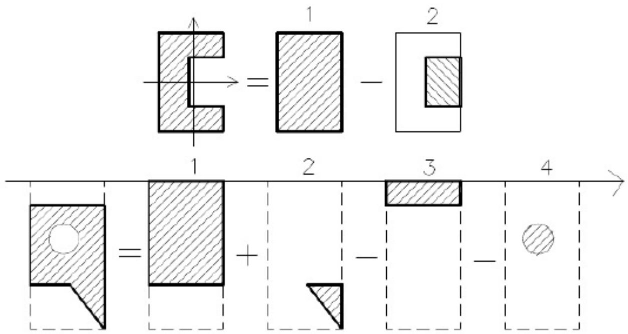
$$\boxed{J_{xy} = \int_A xy dA.}$$

Momenty osiowe oraz moment biegunowy są zawsze dodatnie, natomiast moment dewiacyjny może być dodatni lub ujemny.

Momenty bezwładności figur złożonych są sumą momentów bezwładności prostych figur składowych. Figura złożona może składać się z figur „pełnych” oraz „pustych”. Przy sumowaniu momentów bezwładności figury „puste” uważa się za figury z ujemnymi polami powierzchni.

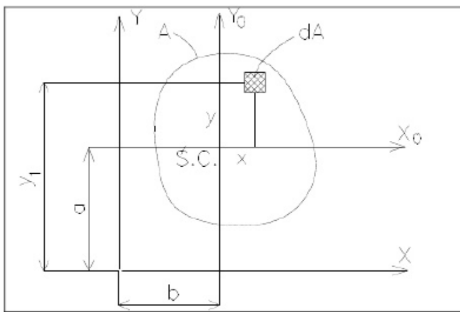
PRZYKŁAD

Figury złożone przedstawione na rysunku podzielić na figury proste.



Podział figury złożonej na figury proste (jeden z możliwych do zastosowania podziałów figury).

Twierdzenie Steinera



Twierdzenie Steinera umożliwia obliczanie momentów bezwładności figur płaskich względem osi równolegle przesuniętych w stosunku do **osi centralnych** (osi przechodzących przez środek ciężkości przekroju).

Dla figury płaskiej o powierzchni A, obliczyć momenty bezwładności względem osi X–Y, równolegle przesuniętych w stosunku do osi centralnych (środkowych) X_0–Y_0 o odcinki a i b.

Na podstawie definicji momentu bezwładności moment osiowy względem osi X dla $y_1 = y + a$ wyraża wzór:

$$J_x = \int_A y_1 dA = \int_A (y+a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a\int_A y dA + a^2\int_A dA = J_{x_0} + Aa^2.$$

W powyższym równaniu całka $\int_A y dA$ opisuje moment statyczny, który względem osi centralnych jest równy zeru. W podobny sposób określa się moment względem osi Y oraz moment dewiacyjny

$$J_y = \int_A (x+b)^2 dA = J_{x_0} + Ab^2,$$

$$J_{xy} = \int_A (x+a)(x+b) dA = J_{x_0 y_0} + Aab.$$

Wyprowadzone wyżej zależności noszą nazwę **twierdzenia Steinera**.

Osiowy moment bezwładności figury płaskiej względem osi równoległej odległej od środka ciężkości o określoną wartość jest równy momentowi względem osi równoległej przechodzącej przez środek ciężkości figury, powiększonemu o iloczyn powierzchni figury i kwadratu odległości między osiami.

Moment dewiacyjny figury płaskiej względem osi równolegle przesuniętych jest równy momentowi dewiacyjnemu względem osi centralnych, powiększonemu o iloczyn powierzchni i obu składowych równoległego przesunięcia.

Twierdzenie Steinera ma następująca postać matematyczną:

$$\boxed{\begin{aligned} J_x &= J_{x_0} + Aa^2, \\ J_y &= J_{y_0} + Ab^2, \\ J_{xy} &= J_{x_0 y_0} + Aab. \end{aligned}}$$

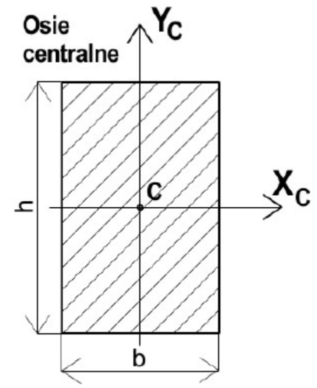
GŁÓWNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI

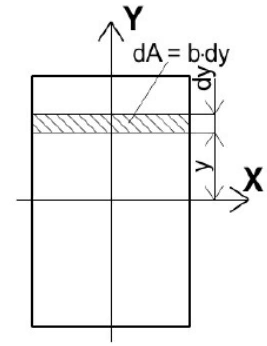
Osie przechodzące przez środek ciężkości przekroju – **OSIE CENTRALNE**. Osie obrócone pod odpowiednim katem, powodującym wyzerowanie momentów dewiacyjnych – **GŁÓWNE OSIE BEZWŁADNOŚCI**.

Momenty względem tych osi – **GŁÓWNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI**

MOMENTY BEZWŁADNOŚCI DLA PRZEKROJU PROSTOKĄTNEGO

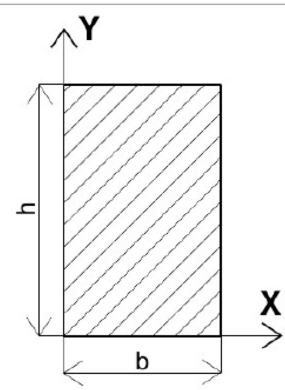
Momenty bezwładności względem osi centralnych X_C–Y_C

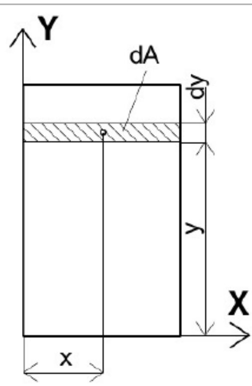




$$I_{Xc} = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b\, dy = \frac{bh^3}{12}, \qquad I_{Yc} = \frac{hb^3}{12}, \qquad I_{XcYc} = 0$$

Momenty bezwładności względem osi X–Y





$$I_X = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2\, b\, dy = \frac{bh^3}{3},\ I_Y = \frac{hb^3}{3},\ I_{XY} = \int_A xy dA = \int_0^h \left(\frac{b}{2}\right) y\, b\, dy = \int_0^h \frac{b^2}{2}\, y\, dy = \frac{b^2h^2}{4}.$$

TWIERDZENIE STEINERA

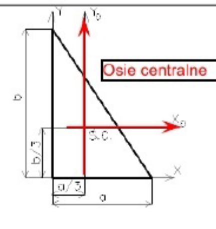
$$I_X = I_{Xc} + A \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{3}, \quad I_Y = I_{Yc} + A \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{hb^3}{12} + \frac{hb^3}{4} = \frac{hb^3}{3},$$

$$I_{XcYc} = I_{XY} + A \cdot \left(\frac{h}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right) = 0 + (bh)\frac{bh}{4} = \frac{b^2h^2}{4}.$$

Przykład:

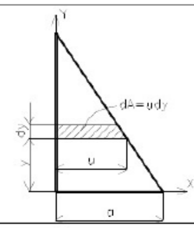
Dla trójkąta prostokątnego przedstawionego na rysunku wyznaczyć momenty bezwładności względem osi X–Y oraz osi centralnych X_0–Y_0.

Wyznaczyć główne momenty bezwładności oraz ich położenie.



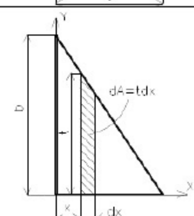
Osiowy moment bezwładności względem osi X:

$$J_x = \int_A y^2 dA = \int_0^b y^2 u dy, \quad u = \frac{a}{b}(b-y), \qquad J_x = \int_0^b \frac{a}{b}(b-y) y^2 dy = \frac{ab^3}{12}.$$



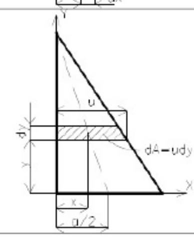
Osiowy moment bezwładności względem osi Y:

$$J_y = \int_A x^2 dA = \int_0^a x^2 t dx, \quad t = \frac{b}{a}(a-x), \qquad J_y = \int_0^b \frac{b}{a}(a-x) x^2 dx = \frac{ba^3}{12}.$$



Moment dewiacyjny wyznacza się po określeniu współrzędnych środka ciężkości powierzchni:

$$J_{xy} = \int_A xy dA = \int_0^b xyu dy, \ x = \frac{1}{2}u, \qquad J_{xy} = \frac{1}{2}\int_0^b \frac{a^2}{b^2}(b-y)^2 y dy = \frac{a^2b^2}{24}.$$



Momenty bezwładności względem osi centralnych (twierdzenia Steinera):

$$J_{x_0} = J_x - A\left(\frac{b}{3}\right)^2 = \frac{ab^3}{12} - \frac{ab}{2}\frac{b^2}{9} = \frac{ab^3}{36}, \quad J_{y_0} = J_y - A\left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{ba^3}{12} - \frac{ab}{2}\frac{a^2}{9} = \frac{ba^3}{36},$$

$$J_{x_0y_0} = J_{xy} - A\left(\frac{a}{3}\right)\left(\frac{b}{3}\right) = \frac{a^2b^2}{24} - \frac{a^2b^2}{18} = -\frac{a^2b^2}{72}.$$

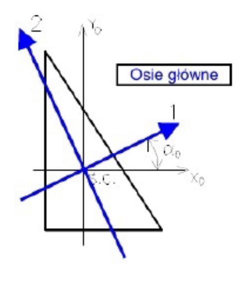
Główne momenty bezwładności:

$$\boxed{J_{1,2} = \frac{ab(a^2+b^2)}{72} \pm \frac{ab}{72}\sqrt{a^4+b^4-a^2b^2}.}$$

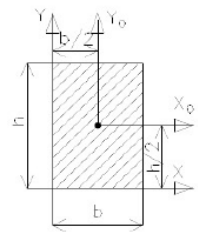
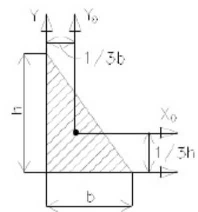
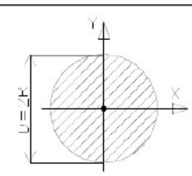
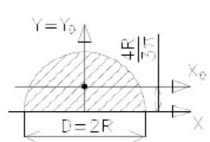
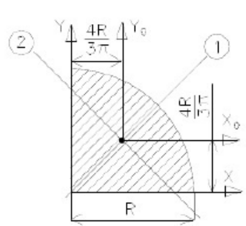
Położenie głównych centralnych osi bezwładności:

$$\boxed{tg2\alpha_o = -\frac{2J_{x_0y_0}}{J_{x_0}-J_{y_0}} = -\frac{-\frac{a^2b^2}{72}}{\frac{ab^3}{12}-\frac{ba^3}{12}} = \frac{ab}{b^2-a^2} > 0.}$$

Kąt α_o jest dodatni i wskazuje kierunek momentu J_1.



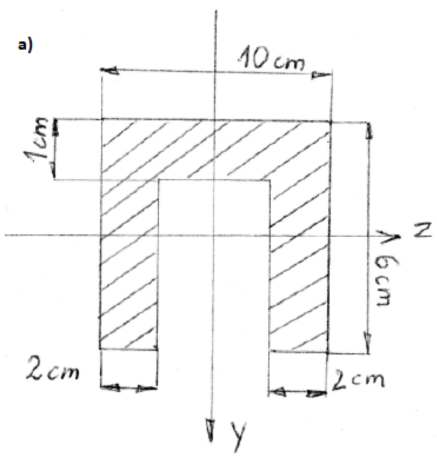
Momenty bezwładności figur prostych

Figura	J_x	J_y	J_{xy}
	$J_{x_o} = \frac{bh^3}{12}$ $J_x = \frac{bh^3}{3}$	$J_{y_o} = \frac{hb^3}{12}$ $J_y = \frac{hb^3}{3}$	$J_{x_o y_o} = 0$ $J_{xy} = \frac{b^2h^2}{4}$
	$J_{x_o} = \frac{bh^3}{36}$ $J_x = \frac{bh^3}{12}$	$J_{x_o} = \frac{hb^3}{36}$ $J_x = \frac{hb^3}{12}$	$J_{x_o y_o} = -\frac{b^2h^2}{72}$ $J_{xy} = \frac{b^2h^2}{24}$
	$J_x = \frac{\pi D^4}{64} =$ $= \frac{\pi R^4}{4}$	$J_y = \frac{\pi D^4}{64} =$ $= \frac{\pi R^4}{4}$	$J_{xy} = 0$
	$J_{x_o} = \frac{D^4}{16}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) =$ $\approx 0{,}00686D^4 =$ $\approx 0{,}1098R^4$ $J_x = \frac{\pi D^4}{128} = \frac{\pi R^4}{8}$	$J_y = \frac{\pi D^4}{128} =$ $= \frac{\pi R^4}{8}$	$J_{xy} = 0$ $J_{x_o y_o} = 0$
	$J_{x_o} = R^4\left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) =$ $\approx 0{,}0549R^4$ $J_x = \frac{\pi D^4}{256} = \frac{\pi R^4}{16}$	$J_x = \frac{\pi R^4}{16}$	$J_{xy} = \frac{R^4}{8}$ $J_{x_o y_0} = \frac{R^4}{8} -$ $-\frac{4R^4}{9\pi} =$ $= -0{,}0165R^4$

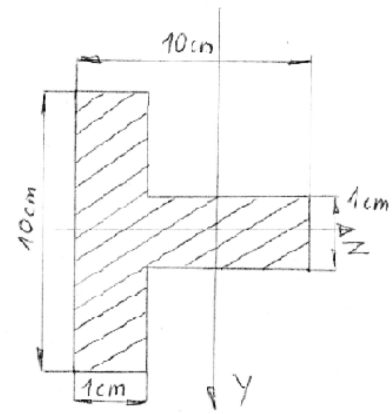
Zadanie 1

Dla figury jak na rysunku wyznaczyć moment bezwładności względem osi y i z

a)



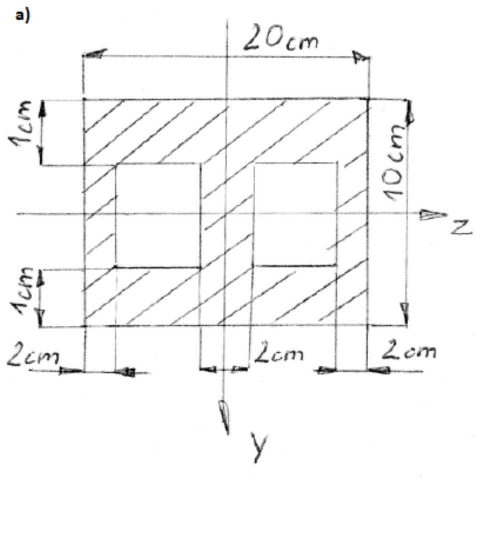
b)



Zadanie 2

Dla figury jak na rysunku wyznaczyć moment bezwładności względem osi y i z

a)



b)