

## Ćwiczenie 9

### BADANIE DRGAŃ NA PŁASZCZYŹNIE FAZOWEJ

Ćwiczenie składa się z dwóch części. Pierwsza polega na badaniu właściwości punktów osobliwych liniowego oscylatora o jednym stopniu swobody, w drugiej bada się obrazy fazowe oscylatorów z różnymi nieliniowościami programowanymi na stanowisku badawczym.

Celem ćwiczenia jest pokazanie praktycznego zastosowania metody topologicznej w badaniu drgań, a także zademonstrowanie ważnych właściwości drgań nieliniowych; a szczególnie niestatecznych punktów równowagi, krzywych separujących i cykli granicznych.

#### 9.1. Wprowadzenie teoretyczne

##### 9.1.1. Płaszczyzna fazowa, trajektorie fazowe, punkty osobliwe

Metoda płaszczyzny fazowej jest topologiczną metodą badania układów dynamicznych II rzędu, w tym także mechanicznych układów o jednym stopniu swobody. Polega ona na poszukiwaniu rozwiązania dynamicznego równania ruchu nie jako funkcji czasu, lecz w postaci zależności między prędkością a przemieszczeniem. Metoda płaszczyzny fazowej pozwala określić podstawowe właściwości ruchu bez potrzeby rozwiązywania wyjściowych równań ruchu w dziedzinie czasu.

Rozpatrzmy układ o jednym stopniu swobody opisany równaniem

$$\ddot{x} + F(x, \dot{x}, t) = 0, \quad (9.1)$$

gdzie  $F$  jest na ogół nieliniową funkcją swych argumentów.

Równanie (9.1) możemy zastąpić dwoma równaniami I rzędu, wprowadzając nowe zmienne:  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$ . Mają one postać

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -F(x_1, x_2, t). \end{aligned} \quad (9.2)$$

Jeżeli są spełnione warunki istnienia i jednoznaczności rozwiązań układu (9.2), to dla każdego warunków początkowych  $x_1(0) = x_{10}$  i  $x_2(0) = x_{20}$  istnieją dwie funkcje

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t, x_{10}, x_{20}), \\ x_2 &= \varphi_2(t, x_{10}, x_{20}), \end{aligned} \quad (9.3)$$

stanowiące rozwiązanie równań (9.2). Równania (9.3) są parametrycznymi równaniami (parametrem jest czas) pewnej krzywej w przestrzeni dwuwymiarowej  $(x_1, x_2)$ . Krzywą tę nazywamy trajektorią fazową, a przestrzeń  $(x_1, x_2)$  – płaszczyzną fazową.

Dzieląc stronami drugie równanie (9.2) przez pierwsze, otrzymujemy równanie I rzędu z niewiadomą funkcją  $x_2 = f(x_1)$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{F(x_1, x_2, t)}{x_2}. \quad (9.4)$$

Możemy zauważyć, że dla układów autonomicznych, tzn. takich, dla których funkcja  $F$  nie zależy jawnie od czasu, rozwiązanie ogólne równania (9.4) opisuje rodzinę stacjonarnych trajektorii fazowych układu. Rodzina ta nosi nazwę obrazu fazowego układu. Metoda płaszczyzny fazowej polega na analizie obrazu fazowego otrzymanego w wyniku całkowania równania (9.4), dlatego odnosi się ona do układów autonomicznych. Dalej zajmiemy się autonomiczną postacią równania (9.4). Zmienne  $x_1$  i  $x_2$  będziemy interpretować jako przemieszczenie i prędkość (liniowe lub kątowe). Równanie trajektorii fazowej przy tych założeniach przyjmuje postać

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{F(x, v)}{v}. \quad (9.5)$$

Punkt płaszczyzny fazowej  $P(x^*, v^*)$ , w którym równocześnie  $v^* = 0$  oraz  $F(x^*, v^*) = 0$ , nazywamy punktem osobliwym układu. Inne punkty nazywamy zwykłymi lub regularnymi. Jak widać, punkty osobliwe układu (9.1) leżą na osi  $x$  płaszczyzny fazowej. Punktów tych może być wiele. Spełnienie warunków jednoznaczności rozwiązań sprawia, że przez każdy regularny punkt płaszczyzny fazowej przechodzi jedna i tylko jedna trajektoria fazowa. Oznacza to, że trajektorie fazowe nie mogą się przecinać w punktach regularnych.

Zauważmy, że punkty osobliwe układu autonomicznego (9.1) są punktami równowagi tego układu. Rzeczywiście, dla punktów osobliwych jest  $v = 0$  oraz  $F(x, v) = 0$ , co pociąga za sobą  $dv/dt = 0$ , a to oznacza równowagę. Aby znaleźć położenie punktów osobliwych na osi  $x$ , należy rozwiązać równanie  $F(x, 0) = 0$ .

W układach liniowych (funkcja  $F$  liniowo zależy od  $x$ ) istnieje tylko jeden punkt osobliwy. Jeśli rozpatrywany punkt osobliwy nie jest punktem zerowym ( $x^* \neq 0$ ), to zawsze można go sprowadzić do zera przez wprowadzenie nowej zmiennej  $y = x - x^*$  i rozpatrywać równanie

$$\ddot{y} + f(y, \dot{y}) = 0, \quad (9.6)$$

gdzie  $f(y, \dot{y}) = F(y + x^* \dot{y})$ , przy czym  $f(0, 0) = 0$ .

Ze względu na zachowanie się trajektorii fazowych w otoczeniu punktów osobliwych punkty te można podzielić na stateczne (trajektorie zaczynające się w dowolnym sąsiedztwie takich punktów nie oddalają się od nich w sposób trwały) i niestateczne (trajektorie oddalają się od nich z upływem czasu). O stateczności punktu osobliwego można często wnioskować na podstawie równania ruchu zlinearyzowanego w otoczeniu tego punktu. Linearyzacja polega na rozwinięciu funkcji  $F(x, v)$  w szereg Taylora (lub funkcji  $f(y, v)$  w szereg Maclaurina) i pominięciu wyrazów stopnia wyższego niż pierwszy. Stateczność punktu osobliwego warunkują pierwiastki równania charakterystycznego układu zlinearyzowanego wokół tego punktu. Jeśli części rzeczywiste obu tych pierwiastków są ujemne, to punkt osobliwy jest asymptotycznie stateczny (wszystkie trajektorie z pewnego otoczenia tego punktu zbiegają do niego wraz z upływem czasu). Jeśli te części są równe zero, to punkt osobliwy może być stateczny, asymptotycznie stateczny lub niestateczny, a warunkują to wyrazy nieliniowe funkcji  $F$ . W przypadku dodatnich części rzeczywistych (lub samych pierwiastków) punkt osobliwy jest niestateczny.

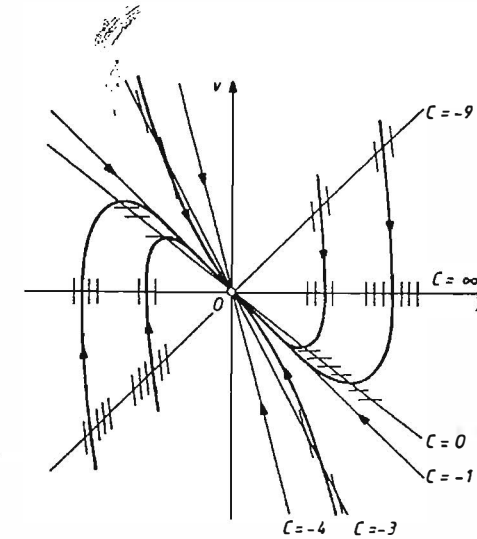
Z równania (9.5) wynika ważna właściwość trajektorii fazowych jako krzywych geometrycznych: we wszystkich punktach regularnych trajektorie fazowe przecinają oś  $x$  pod kątem prostym. Ruch punktu fazowego po trajektorii odbywa się tak, że na górnej półpłaszczyźnie współrzędna  $x$  rośnie ( $v > 0$ ), a na dolnej maleje.

Rozwiązanie równania trajektorii fazowych (9.5), poza przypadkami szczególnymi, również napotyka trudności. Znanych jest kilka metod umożliwiających uzyskanie obrazu fazowego przy wykorzystaniu zależności geometrycznych na płaszczyźnie fazowej. Jedną z nich jest metoda izoklin.

Izokliną nazywamy miejsce geometryczne punktów płaszczyzny fazowej o tej właściwości, że trajektorie w tych punktach mają ten sam kąt nachylenia stycznej. Izokliny, podobnie jak trajektorie fazowe, stanowią rodzinę krzywych, które nie mogą się przecinać w punktach regularnych płaszczyzny fazowej. Z definicji wynika konstrukcja równania rodziny. Jeśli  $C$  oznacza tangens kąta nachylenia stycznej, to rodzina izoklin jest opisana równaniem

$$-\frac{F(x, v)}{v} = C. \quad (9.7)$$

Jeśli w obrazie fazowym istnieją trajektorie proste, to istnieją też izokliny proste i krzywe te pokrywają się. Mając przebiegi izoklin, możemy z dowolną dokładnością, odcinek po odcinku szkicować trajektorię fazową, zaczynając z pewnego punktu początkowego (rys. 9.1).



Rys. 9.1. Konstrukcja trajektorii fazowej metodą izoklin (układ opisany równaniem  $\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = 0$ )

### 9.1.2. Punkty osobliwe autonomicznego układu liniowego

Założmy następującą postać funkcji  $F$  w równaniu (9.1)

$$F(x, \dot{x}, t) = \beta x + \alpha \dot{x}, \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}), \quad (9.8)$$

którą możemy także traktować jako część liniową tej funkcji.

Równanie charakterystyczne dla (9.8) jest

$$r^2 + \alpha r + \beta = 0, \quad (9.9)$$

a jego wyróżnik ma postać  $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$ . Rozpatrzmy cztery przypadki

1)  $\alpha = 0, \beta > 0, \Delta < 0$

Pierwiastki równania (9.9) są liczbami urojonymi

$$r_{1,2} = \pm i\omega_0, \quad (9.10)$$

gdzie  $\omega_0 = \sqrt{\beta}$ .

Rozwiązanie równania ruchu jest funkcją harmoniczną

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (9.11)$$

gdzie  $A$  i  $\varphi$  należy wyznaczyć z warunków początkowych.

Równanie trajektorii fazowych

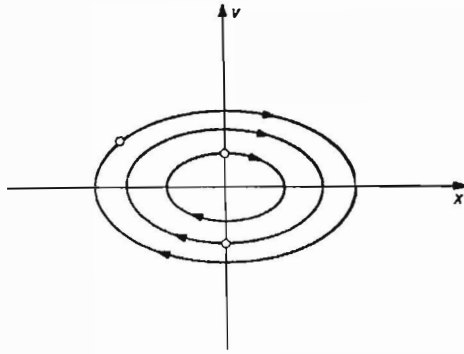
$$\frac{dv}{dx} = -\frac{\beta x}{v} \quad (9.12)$$

ma rozwiązanie ogólne

$$v^2 + \beta x^2 = C, \quad (C > 0), \quad (9.13)$$

które opisuje jednoparametrową rodzinę elips o środku  $(0,0)$  i osiach równoległych do osi współrzędnych (rys. 9.2).

Punkt osobliwy w tym przypadku nazywamy środkiem. Jest to stateczny punkt równowagi układu.



Rys. 9.2. Obraz fazowy układu z punktem osobliwym typu „środek”

2)  $\alpha \neq 0, \Delta < 0$

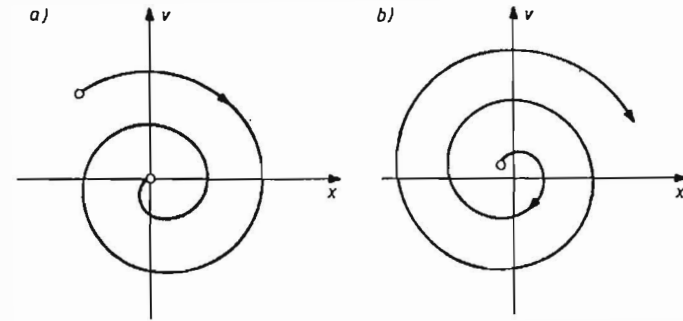
W tym przypadku mamy pierwiastki charakterystyczne

$$r_{1,2} = -\frac{1}{2}\alpha \pm i\omega, \quad (\omega = \sqrt{-\Delta})$$

oraz rozwiązanie równania ruchu

$$x(t) = A \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha t\right) \sin(\omega t + \varphi), \quad (9.15)$$

gdzie  $A$  i  $\varphi$  są stałymi całkowania. Równanie trajektorii jest trudniej rozwiązać. Wystarczy stwierdzić, że trajektorie są spiralami. Punkt osobliwy  $P(0,0)$  nosi nazwę ogniska. Zależnie od znaku  $\alpha$  są dwa typy ogniska: ognisko stateczne ( $\alpha > 0$ ) i niestateczne ( $\alpha < 0$ ). Rysunek (9.3) przedstawia przykłady trajektorii w otoczeniu ogniska statecznego (a) i ogniska niestatecznego (b). Przypadek (a) odpowiada słabemu tłumieniu (tłumieniu podkrytycznemu).



Rys. 9.3. Trajektorie fazowe wokół punktu osobliwego typu „ognisko”

3)  $\alpha \neq 0, \Delta \geq 0$

Pierwiastki charakterystyczne są w tym przypadku rzeczywiste

$$r_{1,2} = -\frac{1}{2}\alpha \pm \omega^*, \quad (\omega^* = \sqrt{\Delta}) \quad (9.16)$$

a rozwiązanie równania ruchu jest

$$x(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha t\right) (A \sinh \omega^* t + B \cosh \omega^* t). \quad (9.17)$$

Punkt osobliwy  $P(0,0)$  nosi nazwę węzła. Jest to węzeł stateczny, gdy  $\alpha > 0$  i niestateczny, gdy  $\alpha < 0$ .

Zbadajmy istnienie trajektorii prostych. Należy tym samym poszukać izolacji prostych. Na podstawie wzoru (9.7) mamy równanie

$$-\frac{\beta x + \alpha v}{v} = C. \quad (9.18)$$

Jest to równanie rodziny prostych, których współczynnik nachylenia jest  $-\beta/(\alpha + C)$ . Trajektorie proste istnieją, ponieważ istnieją rozwiązania równania dla  $C$

$$C = -\frac{\beta}{\alpha + C}, \quad (9.19)$$

identyczne z pierwiastkami charakterystycznymi (9.16).

Istnieją zatem dwie trajektorie proste (jedna w granicznym przypadku, gdy  $\Delta = 0$ ). Na rys. 9.4 przedstawiono trajektorie w otoczeniu węzła statecznego i niestatecznego.

4)  $\alpha = 0, \beta < 0$

W tym przypadku mamy

$$r_{1,2} = \pm \omega^*, \quad (\omega^* = \sqrt{-\beta}) \quad (9.20)$$

oraz

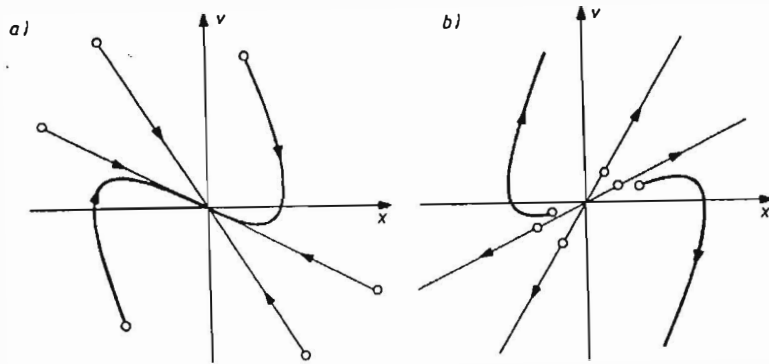
$$x(t) = A \sinh \omega^* t + B \cosh \omega^* t. \quad (9.21)$$

Punkt osobliwy jest niestateczny i nosi nazwę siodła. Równanie trajektorii fazowych ma rozwiązanie

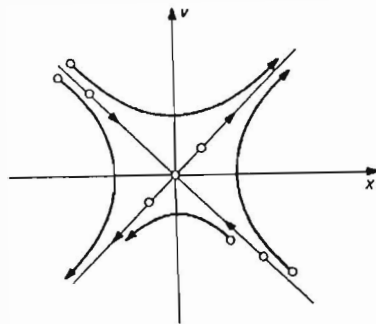
$$(-\beta)x^2 - v^2 = C, \quad (9.22)$$

które opisuje rodzinę hiperbol (rys. 9.5). Trajektorie proste mają równania  $v = \pm \omega^* x$ .

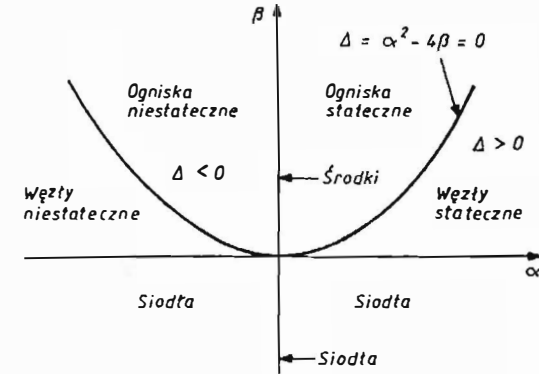
Obszary na płaszczyźnie współczynników  $\alpha$  i  $\beta$  odpowiadające różnym punktom osobliwym pokazano na rys. 9.6.



Rys. 9.4. Trajektorie fazowe wokół punktu osobliwego typu „węzeł”



Rys. 9.5. Przebiegi trajektorii fazowych wokół punktu typu „siodło”



Rys. 9.6. Obszary różnych punktów osobliwych w zależności od współczynników liniowego równania ruchu  $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = 0$

### 9.1.3. Obrazy fazowe niektórych układów nieliniowych

W tej części będą omówione dwa ważne przypadki obrazów fazowych układów nieliniowych, które m.in. mogą być zamodelowane na stanowisku badawczym.

#### 1) Obrazy fazowe z krzywymi separującymi

Obrazy te są charakterystyczne dla nieliniowych układów zachowawczych. Niech  $F(x, v) = F(x)$ . Równanie ruchu (9.1) możemy scałkować następująco, biorąc pod uwagę, że  $\dot{v} = v(dv/dx)$

$$\frac{1}{2}v^2 + U(x) = C \quad (9.23)$$

gdzie  $U(x) = \int_0^x F(x) dx$  jest energią potencjalną układu odniesioną do jednostki masy.

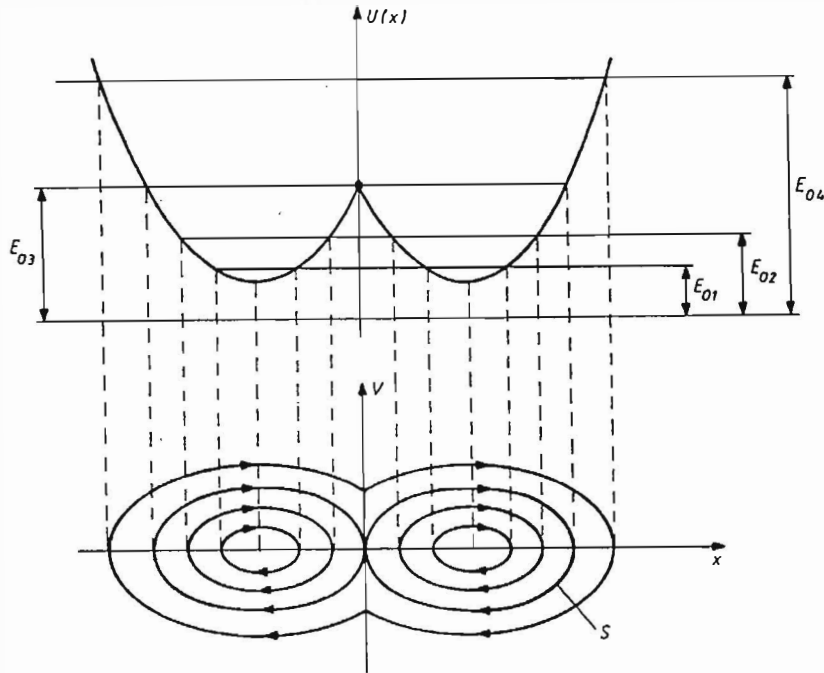
Równanie (9.23) wyraża zasadę zachowania energii całkowitej i opisuje rodzinę trajektorii fazowych. W punktach osobliwych mamy  $F(x) = U'(x) = 0$ , zatem w punktach równowagi energia potencjalna ma ekstrema (lub punkty przegięcia), przy czym minimum odpowiada punktowi statecznemu, a maksimum (lub punkt przegięcia) punktowi niestatecznemu. Jeśli energia potencjalna ma kilka ekstremów, to płaszczyzna fazowa dzieli się na obszary o różnych właściwościach trajektorii. Weźmy funkcję  $F(x)$  w następującej postaci

$$F(x) = -a_0 x - a \operatorname{sgn} x, \quad (9.24)$$

co odpowiada układowi modelowanemu w ćwiczeniu, przy czym  $a > 0$  i  $a_0 < 0$ . Całkując wzór (4.24), otrzymujemy energię potencjalną

$$U(x) = \frac{1}{2} (-a_0)x^2 - ax \operatorname{sgn} x. \quad (9.25)$$

Rysunek 9.7 przedstawia przebiegi  $U(x)$  oraz trajektorii fazowych dla różnych energii całkowitych wprowadzanych poprzez warunki początkowe. Trajektoria  $S$  nosi nazwę krzywej separującej. Oddziela ona obszary płaszczyzny fazowej, w których trajektorie fazowe mają odmiennie właściwości.



Rys. 9.7. Obraz fazowy z krzywą separującą

2) Obrazy fazowe z cyklami granicznymi

Cyklem granicznym nazywamy trajektorię zamkniętą o następujących właściwościach:

- istnieje obszar płaszczyzny fazowej sąsiadujący z trajektorią, w którym wszystkie trajektorie albo zbliżają się do tej trajektorii, albo się od niej oddalają. W pierwszym przypadku mówimy o cyklu granicznym statecznym, w drugim o niestatecznym;

- po przebyciu pełnego cyklu granicznego przez punkt fazowy całkowita energia układu nie zmienia się.

Cykle graniczne występują w układach samowzbudnych. Ruch okresowy odpowiadający cyklowi granicznemu statecznemu oznacza stan równowagi energetycznej, w którym straty energii następujące na pewnym odcinku cyklu

granicznego są kompensowane przez energię doprowadzoną do układu na pozostałym odcinku trajektorii. Cykl graniczny otacza punkt osobliwy (stateczny lub niestateczny). Cykle graniczne mogą być zawarte jeden w drugim, ten w następnym itd. Wówczas są na przemian – stateczne i niestateczne.

Rozpatrzmy ruch układu opisanego równaniem (układ ten może być zamodelowany na stanowisku badawczym w tym ćwiczeniu)

$$\ddot{x} = a_0x + af(v), \quad (v = \dot{x}, a_0 < 0, a < 0), \quad (9.26)$$

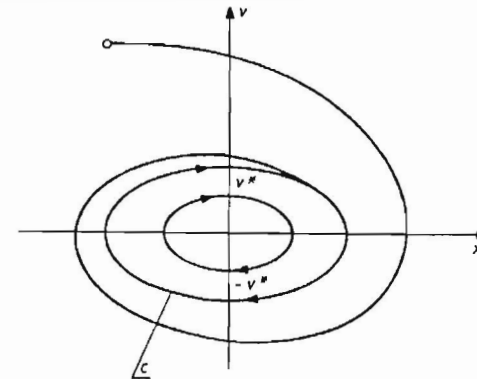
przy czym

$$f(v) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |v| \leq v^* \\ a(v - v^*) & \text{dla } |v - v^*| > 0. \end{cases} \quad (9.27)$$

Zadanie warunków początkowych  $x(0) = x_0$  i  $v(0) = v_0$  powoduje wprowadzenie do układu energii (na jednostkę masy)

$$E_0 = \frac{1}{2} v_0^2 + \frac{1}{2} (-a_0)x_0^2. \quad (9.28)$$

Jeżeli  $E_0 \leq E_0^* = 1/2(v^*)^2$ , to ruch jest okresowy, punkt osobliwy  $P(0,0)$  jest środkiem, drgania zachowują energię początkową, a trajektorie są elipsami o środku w punkcie  $(0,0)$ . Jeżeli  $E_0 > E_0^*$ , to występuje rozpraszanie energii, a trajektorie są spiralami, które asymptotycznie zmierzają do cyklu granicznego (rys. 9.8). Równanie cyklu granicznego można otrzymać przyjmując warunki początkowe  $x(0) = 0, v(0) = v^*$ . Na podstawie zasady zachowania energii otrzymujemy równanie trajektorii



Rys. 9.8. Obraz fazowy z cyklem granicznym

$$v^2 + (-a_0)x^2 = (v^*)^2, \quad (9.29)$$

które możemy przekształcić do postaci

$$\frac{x^2}{\left(\frac{v^*}{-a_0}\right)^2} + \frac{v^2}{(v^*)^2} = 1. \quad (9.30)$$

Cykl graniczny jest więc elipsą (rys. 9.8).

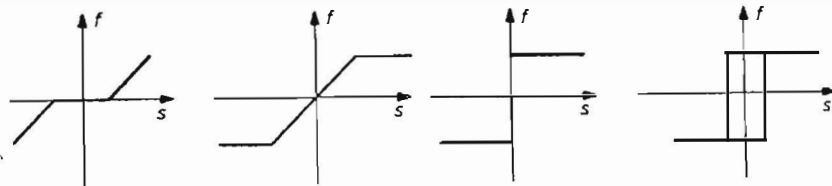
## 9.2. Opis stanowiska

Stanowisko badawcze składa się z układu analogowego umożliwiającego modelowanie pewnych nieliniowych układów II rzędu oraz z rejestratora XY. Można zamodelować układy opisane dwoma równaniami I rzędu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_0x_1 + a_1x_2 + af(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (9.31)$$

które można przedstawić za pomocą jednego równania II rzędu

$$\ddot{x} - a_1\dot{x} - a_0x - af(x, \dot{x}) = 0. \quad (9.32)$$



Rys. 9.9. Funkcje nieliniowe realizowane na stanowisku badawczym

Współczynnikiem  $a_0$ ,  $a_1$  i  $a$  możemy nadawać różne wartości (od 0 do 7) i różne znaki. Funkcja  $f$  może mieć jedną z czterech postaci (rys. 9.9). Modelowanie polega na wyborze odpowiedniego wariantu funkcji  $f$ , określeniu jej argumentów oraz dobraniu wartości i znaków współczynników  $a_0$ ,  $a_1$  i  $a$ . Sygnał  $x_1$  jest wprowadzany na wejście X, a sygnał  $x_2$  na wejście Y rejestratora. Dla wybranych warunków początkowych  $(x_{10}, x_{20})$  układ równań (9.31) jest rozwiązywany metodą analogową. Rozwiązywaniu towarzyszy kreślenie trajektorii fazowej przez pisak rejestratora. Warunki początkowe ustawia się za pomocą pokręteł  $x_1^0$  i  $x_2^0$  na płycie czołowej stanowiska przy wciśniętym klawiszu WP. Aby uzyskać rozwiązanie, należy wcisnąć klawisz ROZ. Za-

trzymanie rozwiązywania w dowolnym momencie następuje po wciśnięciu klawisza STOP. Rozwiązanie można kontynuować lub powrócić do warunków początkowych przez wciśnięcie odpowiedniego klawisza (ROZ lub WP).

## 9.3. Przebieg ćwiczenia

### Część I

1. Włączyć zasilanie układu analogowego i rejestratora.
2. Zbudować modele i zbadać na płaszczyźnie fazowej układy liniowe, w których występują następujące punkty osobliwe:
  - środek,
  - ognisko stateczne i niestateczne,
  - węzeł stateczny i niestateczny,
  - siodło.
3. Skomentować badane obrazy fazowe.

### Część II

1. Zbudować model i zbadać na płaszczyźnie fazowej układ nieliniowy z krzywą separującą.
2. Zbudować model i zbadać układ z cyklem granicznym.
3. Zbudować model i zbadać układ z dowolną inną nieliniowością.
4. Omówić uzyskane obrazy fazowe.

## 9.4. Treść sprawozdania

Sprawozdanie powinno zawierać:

- 1) opis stanowiska badawczego,
- 2) opis wykonanych czynności,
- 3) uzyskane obrazy fazowe modelowanych układów wraz z opisem,
- 4) uwagi dotyczące otrzymanych wyników.