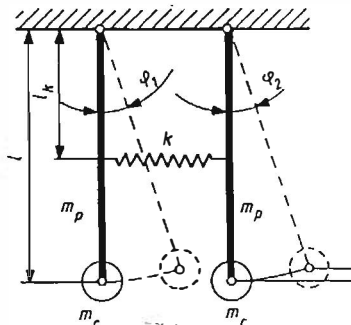


DRGANIA SWOBODNE UKŁADU O DWÓCH STOPNIACH SWOBODY

Celem ćwiczenia jest doświadczalne wyznaczenie częstości drgań własnych układu o dwóch stopniach swobody, pokazanie postaci drgań odpowiadających tym częstościom, a także zademonstrowanie zjawiska dudnienia, jakie występuje w przypadku, gdy częstości własne niewiele różnią się od siebie.

6.1. Wprowadzenie teoretyczne



Rys. 6.1. Schemat układu o dwóch stopniach swobody

Rozpatrzmy układ przedstawiony na rys. 6.1. Jest on złożony z dwóch jednakowych wahadeł fizycznych połączonych sprężyną o sztywności k . Wahadła charakteryzują się tym, że masa ciała m_c zamocowanego na końcu pręta o długości l jest w przybliżeniu równa masie pręta m_p ($m_c = m_p = m$). Dla uproszczenia pomijamy wymiary zawieszonych ciężarków, traktując je jako ciała o masach skupionych w punktach, w odległości l od osi obrotu. Sprężyna jest zamocowana w odległości l_k od osi obrotu, przy czym $l_k = 0,5l$.

Dynamiczne równania ruchu układu możemy otrzymać np. z równania ruchu obrotowego ($J\ddot{\varphi} = M$) lub jako równania Lagrange'a II rodzaju. W postaci zlinearyzowanej wokół położenia równowagi wahadeł mają one postać

$$\frac{4}{3} ml^2 \ddot{\varphi}_1 + \left(\frac{3}{2} mgl + \frac{kl^2}{4} \right) \varphi_1 - \frac{kl^2}{4} \varphi_2 = 0, \quad (6.1)$$

$$\frac{4}{3} ml^2 \ddot{\varphi}_2 + \left(\frac{3}{2} mgl + \frac{kl^2}{4} \right) \varphi_2 - \frac{kl^2}{4} \varphi_1 = 0,$$

gdzie:

φ_1 i φ_2 – oznaczają odpowiednio kąty wychyleń wahadeł.

Równania te możemy również przedstawić w postaci macierzowej

$$\mathbf{B} \ddot{\varphi} + \mathbf{K} \varphi = 0, \quad (6.2)$$

gdzie

\mathbf{B} – oznacza macierz współczynników bezwładności o wyrazach

$$b_{11} = b_{22} = \frac{4}{3} ml^2, \quad b_{12} = b_{21} = 0,$$

\mathbf{K} – macierz współczynników sztywności o wyrazach

$$k_{11} = k_{22} = \frac{3}{2} mgl + \frac{kl^2}{4}, \quad k_{12} = k_{21} = -\frac{kl^2}{4}.$$

Wprowadzając warunki początkowe, dostarczamy jednorazową porcję energii do układu, co wywołuje jego drgania swobodne. Rozwiązania układu równań (6.1) poszukujemy w postaci

$$\varphi_1 = a_1 \sin(\omega t + \delta), \quad (6.3)$$

$$\varphi_2 = a_2 \sin(\omega t + \delta).$$

Podstawiając rozwiązania (6.3) do (6.1), a następnie dzieląc obie strony równań przez $\sin(\omega t + \delta)$, otrzymujemy jednorodny układ równań algebraicznych z niewiadomymi amplitudami a_1 i a_2 oraz częstością ω jako parametrem w postaci

$$(-b_{11}\omega^2 + k_{11}) a_1 + k_{12} a_2 = 0, \quad (6.4)$$

$$k_{21} a_1 + (-b_{22}\omega^2 + k_{22}) a_2 = 0.$$

Aby istniały niezerowe rozwiązania tego układu, jego wyznacznik główny musi być równy zero

$$\begin{vmatrix} -b_{11}\omega^2 + k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & -b_{22}\omega^2 + k_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (6.5)$$

Z rozwiązania wyznacznika (6.5) otrzymujemy tzw. równanie częstości

$$\omega^4 - \frac{b_{11}k_{22} + b_{22}k_{11}}{b_{11}b_{22}} \omega^2 + \frac{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}{b_{11}b_{22}} = 0, \quad (6.6)$$

z którego możemy wyznaczyć wzory na częstości własne naszego układu

$$\omega_1^2 = \frac{9}{8} \frac{g}{l} \quad (6.7)$$

$$\omega_2^2 = \frac{9}{8} \frac{g}{l} + \frac{3}{8} \frac{k}{m}$$

Podstawiając we wzorze (6.4) ω_1 zamiast ω , otrzymujemy algebraiczny układ równań dla amplitud drgań swobodnych pierwszej postaci

$$\begin{aligned} (-b_{11}\omega_1^2 + k_{11})a_{11} + k_{12}a_{21} &= 0, \\ k_{21}a_{11} + (-b_{22}\omega_1^2 + k_{22})a_{21} &= 0, \end{aligned} \quad (6.8)$$

gdzie:

- a_{11} – amplituda drgań wahadła pierwszego pierwszej postaci,
- a_{21} – amplituda drgań wahadła drugiego pierwszej postaci (pierwszy wskaźnik – numer współrzędnej, drugi – numer postaci drgań).

Równania (6.8) są zależne od siebie, co wynika z zerowości ich wyznacznika głównego, dlatego obu amplitud nie możemy wyznaczyć jednoznacznie. Z dowolnego z równań możemy natomiast wyznaczyć stosunek $a_{21}/a_{11} = 1$.

Postępując analogicznie z częstotścią ω_2 , otrzymujemy wartość stosunku $a_{22}/a_{12} = -1$. Otrzymane wyżej stosunki nazywamy współczynnikami postaci. Ogólnie, definiując $\mu_{ij} = a_{ij}/a_{1j}$, otrzymujemy macierz współczynników postaci, której pierwszy wiersz stanowią jedynki. W naszym przypadku mamy więc

$$\mu_{11} = \mu_{12} = 1$$

oraz

$$\mu_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = 1 \quad \text{i} \quad \mu_{22} = \frac{a_{22}}{a_{12}} = -1$$

Rozwiązanie ogólne rozpatrywanego układu możemy przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= a_{11} \sin(\omega_1 t + \delta_1) + a_{12} \sin(\omega_2 t + \delta_2), \\ \varphi_2(t) &= a_{11} \mu_{21} \sin(\omega_1 t + \delta_1) + a_{12} \mu_{22} \sin(\omega_2 t + \delta_2). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Dla naszego układu, po uwzględnieniu wartości μ_{ij} mamy

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= a_{11} \sin(\omega_1 t + \delta_1) + a_{12} \sin(\omega_2 t + \delta_2), \\ \varphi_2(t) &= a_{11} \sin(\omega_1 t + \delta_1) - a_{12} \sin(\omega_2 t + \delta_2). \end{aligned}$$

gdzie:

$a_{11}, a_{12}, \delta_1, \delta_2$ – stałe zależne od warunków początkowych.

Można postawić pytanie: Jakie warunki początkowe należy zadać, aby obserwować poszczególne postacie drgań?

Przyjmijmy, że φ_{10} oznacza $\varphi_1(t=0)$, $\varphi_{20} = \varphi_2(t=0)$ i analogicznie $\omega_{10} = \dot{\varphi}_1(t=0)$, $\omega_{20} = \dot{\varphi}_2(t=0)$. Wówczas

$$\varphi_{10} = a_{11} \sin \delta_1 + a_{12} \sin \delta_2,$$

$$\varphi_{20} = a_{11} \sin \delta_1 - a_{12} \sin \delta_2,$$

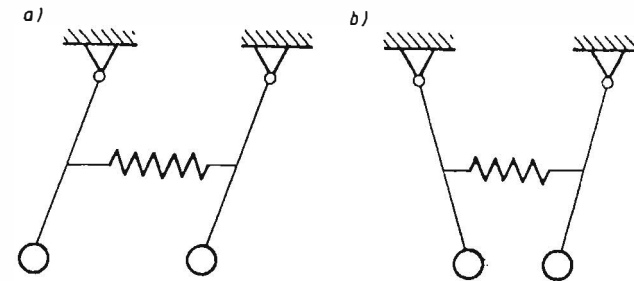
$$\omega_{10} = a_{11} \omega_1 \cos \delta_1 + a_{12} \omega_2 \cos \delta_2,$$

$$\omega_{20} = a_{11} \omega_1 \cos \delta_1 - a_{12} \omega_2 \cos \delta_2.$$

Jeśli chcemy obserwować drgania pierwszej postaci, musimy założyć $a_{12} = 0$. Wówczas $\varphi_{10} - \varphi_{20} = 0$, czyli $\varphi_{10} = \varphi_{20}$.

Analogicznie $\omega_{10} - \omega_{20} = 0$, czyli $\omega_{10} = \omega_{20}$ (w szczególności możemy przyjąć $\omega_{10} = \omega_{20} = 0$).

Oznacza to, że drgania własne pierwszej postaci możemy obserwować, jeśli przyjmiemy jako warunek początkowy $\varphi_{10} = \varphi_{20}$, czyli wychylimy oba wahadła o ten sam kąt (co do wartości i znaku). Postępując analogicznie, otrzymujemy, że drgania własne drugiej postaci możemy obserwować, jeśli w chwili początkowej przyjmiemy $\varphi_{10} = -\varphi_{20}$. Obraz graficzny drgań własnych pierwszej i drugiej postaci przedstawiono na rys. 6.2.



Rys. 6.2. Postacie drgań własnych: a) pierwsza, b) druga

Ciekawy przypadek możemy otrzymać, jeśli przyjmiemy w chwili początkowej $\varphi_{10} = \varphi_0$ oraz $\varphi_{20} = \omega_{10} = \omega_{20} = 0$. Wówczas

$$\varphi_{10} = a_{11} \sin \delta_1 + a_{12} \sin \delta_2,$$

$$0 = a_{11} \sin \delta_1 - a_{12} \sin \delta_2,$$

$$0 = a_{11} \omega_1 \cos \delta_1 + a_{12} \omega_2 \cos \delta_2,$$

$$0 = a_{11} \omega_1 \cos \delta_1 - a_{12} \omega_2 \cos \delta_2.$$

Z pierwszego i drugiego z tych równań otrzymujemy

$$\varphi_{10} = 2a_{11} \sin \delta_1.$$

Z równania trzeciego i czwartego, z warunku niezerowych rozwiązań dla a_{11} i a_{12} otrzymujemy $\delta_1 = \delta_2 = \pi/2$.

Uwzględniając powyższe otrzymujemy

$$a_{11} = a_{12} = \frac{1}{2} \varphi_{10} = \frac{1}{2} \varphi_0$$

i rozwiązanie ogólne w postaci

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2} \varphi_0 \cos \omega_1 t + \frac{1}{2} \varphi_0 \cos \omega_2 t, \quad (6.10)$$

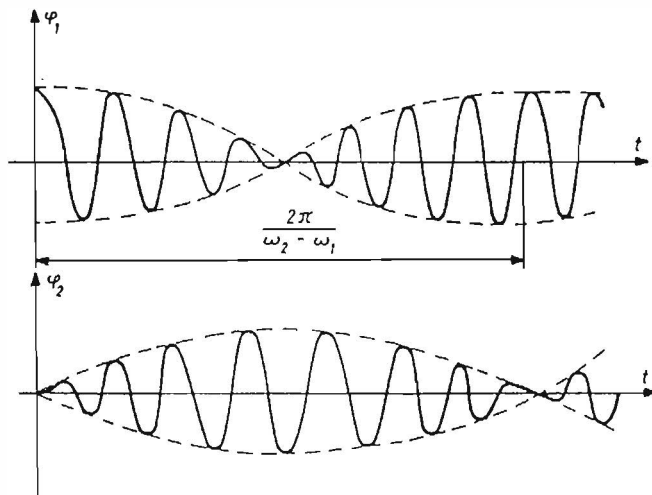
$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2} \varphi_0 \cos \omega_1 t - \frac{1}{2} \varphi_0 \cos \omega_2 t.$$

Korzystając ze wzorów trygonometrycznych wyrażenia (6.10) możemy przedstawić następująco:

$$\varphi_1(t) = \varphi_0 \cos \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \cos \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \right), \quad (6.11)$$

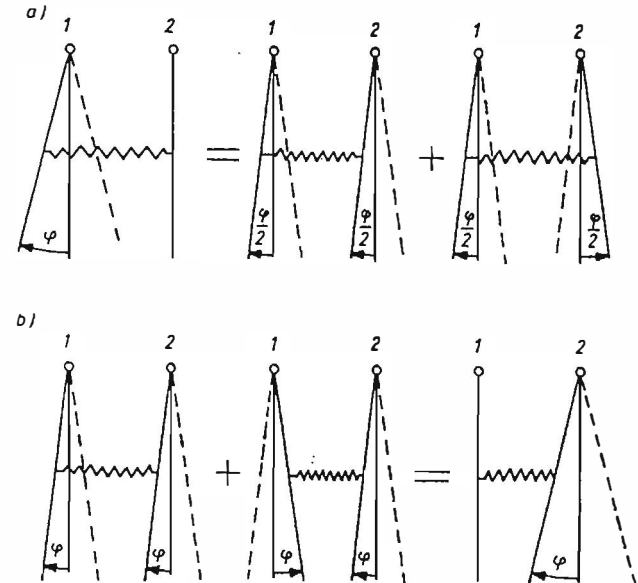
$$\varphi_2(t) = \varphi_0 \sin \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \sin \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \right).$$

Przebieg rozwiązań (6.11) przedstawiono na rys. 6.3. Widzimy, że w przypadku sprzężenia dwóch identycznych układów drgających o jednym stopniu swobody drgania w układzie sprzężonym mają charakter dudnień. Energia określona warunkami początkowymi jest przekazywana okresowo z jednego układu do drugiego. Zjawisko przedstawiono na rys. 6.4.



Rys. 6.3. Zjawisko dudnienia

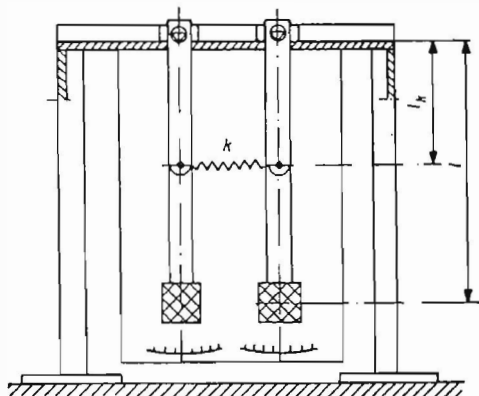
W pierwszej fazie wahadło 1 wykonuje drgania, wahadło 2 jest nieruchome (rys. 6.4a). Ruch ten może być uważany za sumę dwóch drgań własnych pierwszej i drugiej postaci o częstościach ω_1 i ω_2 . Przy dostatecznie bliskich wartościach tych częstości potrzeba pewnego czasu (odpowiadającego kilku okresom), aby nastąpiło przesunięcie faz. W pewnej chwili przesunięcie faz obu postaci drgań wynosi 180° , co ilustruje rys. 6.4b. Dodając oba przedstawione ruchy, można zauważyć, że wahadło 1 jest teraz nieruchome, podczas gdy wahadło 2 wykonuje drgania z amplitudą φ_0 . Zjawisko to powtarza się i drgania przenoszą się z jednego wahadła na drugie.



Rys. 6.4. Nakładanie się drgań pierwszej i drugiej postaci podczas dudnienia

6.2. Opis stanowiska

Stanowisko badane podczas ćwiczenia przedstawiono na rys. 6.5. Odpowiada ono z dużą dokładnością modelowi przedstawionemu na rys. 6.1. Wahadła są podparte w dwóch pryzmach, co powoduje, że mogą wykonywać drgania tylko w płaszczyźnie pionowej.



Rys. 6.5. Schemat stanowiska

6.3. Przebieg ćwiczenia

1. Wyznaczanie częstości drgań własnych pierwszej postaci
 - wychylić oba wahadła o taki sam kąt co do wartości i znaku,
 - zmierzyć czas 20 okresów tych drgań ($20 T_1$),
 - obliczyć okres T_1 , a następnie częstość $\omega_1 = 2\pi/T_1$.
2. Wyznaczanie częstości drgań własnych drugiej postaci
 - wychylić oba wahadła o tę samą wartość kąta, lecz w przeciwną stronę,
 - zmierzyć czas 20 okresów tych drgań ($20 T_2$),
 - obliczyć okres T_2 , a następnie częstość $\omega_2 = 2\pi/T_2$.
3. Wyznaczanie częstości dudnienia
 - wychylić jedno wahadło o mały kąt,
 - zmierzyć czas pięciu okresów ($5 T_d$),
 - obliczyć okres dudnienia T_d , a następnie częstość dudnienia $\omega_d = 2\pi/T_d$.
4. Obliczanie częstości własnych na podstawie wyprowadzonych wzorów
 - obliczyć wartość częstości ω_1 oraz ω_2 na podstawie wzorów (6.7),
 - obliczyć wartość częstości dudnienia $\omega_d = \omega_2 - \omega_1$,
 - porównać wyniki uzyskane z metody doświadczalnej i teoretycznej.

6.4. Treść sprawozdania

Sprawozdanie powinno zawierać:

- 1) schemat rozpatrywanego układu,

- 2) wyznaczone parametry układu (wymiary, sztywność sprężyny),
- 3) częstości własne pierwszej i drugiej postaci oraz częstość dudnienia wyznaczone doświadczalnie,
- 4) częstości własne pierwszej i drugiej postaci oraz częstość dudnienia obliczone na podstawie wyprowadzonych wzorów,
- 5) porównanie wyników i wnioski.