

## DYNAMICZNY ELIMINATOR DRGAŃ

Celem ćwiczenia jest zapoznanie z zasadą działania dynamicznych eliminatorów drgań oraz porównanie krzywych rezonansowych dla bezwładnościowo wymuszonych drgań układu głównego: bez eliminatora oraz z tłumionym dynamicznym eliminatorem drgań.

## 5.1. Wprowadzenie teoretyczne

## 5.1.1. Nie tłumiony dynamiczny eliminator drgań

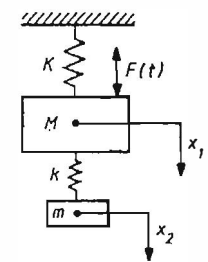
Elementy maszyn obciążone siłami zmiennymi są narażone na niebezpieczne drgania wymuszane przez te siły, zwłaszcza gdy częstotliwości zmian tych sił, a więc i częstotliwości drgań wymuszonych są bliskie częstotliwościom drgań własnych układu, co prowadzi do rezonansu. Jednym ze sposobów zmniejszenia amplitud tych niebezpiecznych drgań jest zastosowanie w układzie drgającym dynamicznego eliminatora drgań. Najprostszy przykład układu z nie tłumionym dynamicznym eliminatorem przedstawiono na rys. 5.1. Założono, że układ główny, złożony z ciała o masie  $M$  i sprężyny o sztywności  $K$ , przedstawia schemat rozpatrywanego elementu maszyny drgającego pod wpływem zmiennej siły  $F(t) = F(v)\sin vt$ , o amplitudzie  $F(v) = m_1 e v^2$  (wymuszenie bezwładnościowe), gdzie:  $m_1$  oznacza masę nie wyważonych elementów wirujących,  $e$  – przesunięcie środka masy  $m_1$  względem osi obrotu,  $v$  – prędkość kątową wirującej siły odśrodkowej.

Analizę drgań układu z eliminatorem przy wymuszeniu siłą harmoniczną o stałej amplitudzie przedstawiono m.in. w monografiach [1] i [2].

Dynamicznym eliminatorem drgań jest ciało o masie  $m$  (kilkakrotnie mniejszej od masy  $M$  układu głównego) zawieszona na sprężynie o sztywności  $k$ .

*Twierdzenie*

*Jeżeli częstota drgań własnych eliminatora dobierze się tak, aby była równa częstotliwości siły wymuszającej, to drgania układu głównego zostają wówczas wyeliminowane.*



Rys. 5.1. Schemat układu drgającego z eliminatorem nie tłumionym

Eliminator wykonuje wtedy takie drgania, w których siła pochodząca od jego sprężyny jest w każdej chwili równa i przeciwnie skierowana do siły wymuszającej  $F(t)$ .

Stosunek powyższego twierdzenia wykażemy, analizując równania ruchu układu przedstawionego na rys. 5.1, a więc

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x}_1 + Kx_1 + k(x_1 - x_2) &= F(v) \sin vt \\ m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Drgania wymuszone (ustalone) układu głównego i eliminatora możemy opisać zależnościami:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_{01} \sin vt \\ x_2 &= x_{02} \sin vt \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

gdzie  $x_{01}$  i  $x_{02}$  oznaczają amplitudy drgań układu głównego i eliminatora. Po podstawieniu wyrażen (5.2) do (5.1) i uproszczeniu przez  $\sin vt$ , otrzymujemy układ równań algebraicznych:

$$\left. \begin{aligned} (-Mv^2 + K + k)x_{01} - kx_{02} &= m_1 ev^2 \\ -kx_{01} + (-mv^2 + k)x_{02} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Aby sprowadzić równania do postaci bezwymiarowej, dzielimy obie strony równań (5.3) odpowiednio przez  $K$  i  $k$ , a następnie wprowadzamy oznaczenia:

$$\frac{K}{M} = \omega_{01}^2 \quad - \text{częstość drgań własnych układu głównego,}$$

$$\frac{k}{m} = \omega_{02}^2 \quad - \text{częstość drgań własnych eliminatora,}$$

$$\frac{m_1 e \omega_{01}^2}{K} = x_{st} \quad - \text{ugięcie sprężyny o sztywności } K \text{ wskutek statycznego obciążenia siłą równą amplitudzie siły odśrodkowej przy częstości } v = \omega_{01}.$$

Stosunki amplitud do ugięcia statycznego wyrażamy następująco:

$$\frac{x_{01}}{x_{st}} = \frac{\left(\frac{v}{\omega_{01}}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{v}{\omega_{02}}\right)^2\right]}{\left[1 - \left(\frac{v}{\omega_{02}}\right)^2\right] \left[1 + \frac{k}{K} - \left(\frac{v}{\omega_{01}}\right)^2\right] - \frac{k}{K}}, \quad (5.4)$$

$$\frac{x_{02}}{x_{st}} = \frac{\left(\frac{v}{\omega_{01}}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{v}{\omega_{02}}\right)^2\right] \left[1 + \mu - \left(\frac{v}{\omega_{01}}\right)^2\right] - \frac{k}{K}}. \quad (5.5)$$

Wyrażenie (5.4) stanowi dowód podanego twierdzenia. Nietrudno zauważyć bowiem, że przy  $\omega_{02} = v$  stosunek  $x_{01}/x_{st}$  przyjmuje wartość równą zero, co oznacza, że drgania układu głównego zostają wyeliminowane.

Z równania (5.5) wynika, że jeśli przyjmiemy  $\omega_{02} = v$ , to otrzymamy

$$x_{02} = -\frac{K}{k} \left(\frac{v}{\omega_{01}}\right)^2 \frac{m_1 e \omega_{01}^2}{K} = -\frac{m_1 e v^2}{k}.$$

Wynika stąd, że eliminator wykonuje drgania

$$x_2 = -\frac{m_1 e v^2}{k} \sin vt. \quad (5.6)$$

Siła w sprężynie eliminatora jest więc równa co do wartości sile wymuszającej i przeciwnie do niej skierowana.

Ograniczenie ugięcia sprężyny eliminatora do dopuszczalnych wartości musimy również uwzględnić przy doborze eliminatora. Wykazano wyżej, że eliminator o częstości drgań własnych  $\omega_{02}$  likwiduje drgania wymuszone układu głównego o częstości  $v = \omega_{02}$ . Jeżeli zależy nam na wyeliminowaniu najbardziej niebezpiecznych drgań rezonansowych układu głównego (gdzie  $v = \omega_{01}$ , to musimy dobrać eliminator o częstości własnej  $\omega_{02} = \omega_{01}$ , inaczej mówiąc „nastroić” eliminator na częstość rezonansową układu głównego.

Poniżej przeanalizujemy drgania układu z rys. 5.1 w przypadku zastosowania tak właśnie dobranego eliminatora.

Zakładamy  $\omega_{02} = \omega_{01} = \omega_0$ , a więc  $k/K = m/M = \mu$ . Wówczas, na podstawie zależności (5.2) oraz (5.4) i (5.5) otrzymujemy wyrażenia opisujące drgania układu głównego i eliminatora

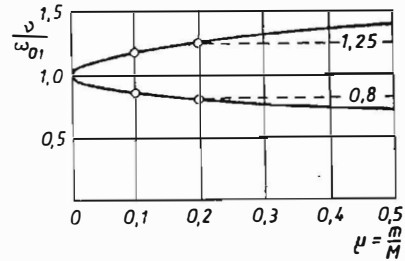
$$\frac{x_1}{x_{st}} = \frac{\left(\frac{v}{\omega_0}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{v}{\omega_0}\right)^2\right]}{\left[1 - \left(\frac{v}{\omega_0}\right)^2\right] \left[1 + \mu - \left(\frac{v}{\omega_0}\right)^2\right] - \mu} \sin vt, \quad (5.7)$$

$$\frac{x_2}{x_{st}} = \frac{\left(\frac{v}{\omega_0}\right)^2 \sin vt}{\left[1 - \left(\frac{v}{\omega_0}\right)^2\right] \left[1 + \mu - \left(\frac{v}{\omega_0}\right)^2\right] - \mu} \quad (5.8)$$

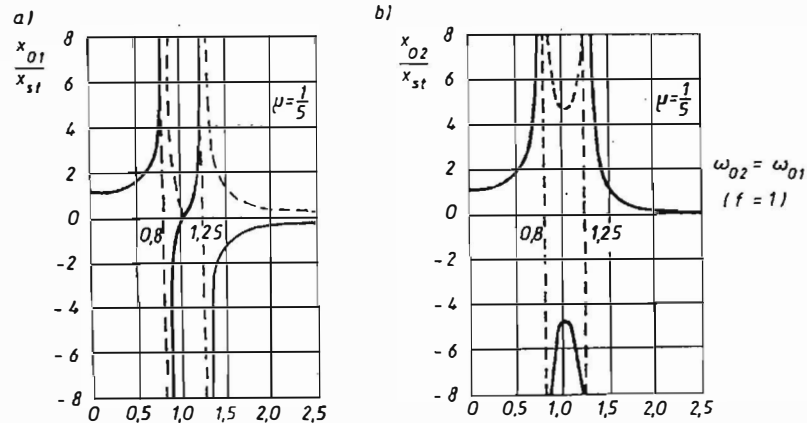
Mianowniki obu powyższych równań są jednakowe. Przyrównując je do zera, otrzymujemy równanie kwadratowe względem  $(v/\omega_0)^2$ , którego pierwiastki przyjmują postać

$$\alpha_{1,2}^2 = \left(\frac{v}{\omega_0}\right)_{1,2}^2 = \left(1 + \frac{\mu}{2}\right) \pm \left(\mu + \frac{\mu^2}{4}\right)^{0,5} \quad (5.9)$$

Wynika stąd, że tym razem uzyskujemy rezonans przy częstościach drgań  $v_1$  oraz  $v_2$ , odpowiadających pierwiastkom  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ . Na rys. 5.2 przedstawiono zależność tych nowych częstości rezonansowych od wartości stosunku mas  $\mu$ .



Rys. 5.2. Przebieg zależności częstości rezonansowych układu głównego od wielkości masy eliminatora w wielkościach bezwymiarowych



Rys. 5.3. Krzywe rezonansowe: a) układu głównego, b) eliminatora

Przebiegi krzywych rezonansowych dla układu głównego i eliminatora uzyskane na podstawie zależności (5.4) i (5.5) przedstawiono na rys. 5.3. Ponieważ interesuje nas głównie przebieg amplitudy a nie fazy, w dalszych rozważaniach będziemy wykreślać krzywe rezonansowe, przenosząc części wykresów leżące poniżej zerowej osi poziomej nad tę oś (linie kreskowe na rys. 5.3).

### 5.1.2. Tłumiony dynamiczny eliminator drgań

Omawiany wcześniej nie tłumiony dynamiczny eliminator drgań, jak wynika z przeprowadzonej analizy, zmniejsza do zera drgania układu głównego, ale tylko drgania o jednej częstości  $v$ , np. w rezonansie. Występują jednak drgania rezonansowe przy dwu innych częstościach.

Korzystniejszy rezultat uzyskuje się, stosując tłumiony dynamiczny eliminator drgań, który wprowadzi nie zmniejsza do zera amplitudy drgań układu głównego, ale zmniejsza jego amplitudy drgań w całym zakresie częstości.

Rozpatrzmy układ przedstawiony na rys. 5.4. W układzie eliminatora wprowadzono teraz tłumik o stałej tłumienia  $c$ . W układzie głównym, dla uproszczenia, nadal nie uwzględniamy tłumienia. Założmy, podobnie jak poprzednio, że mamy do czynienia z wymuszeniem bezwładnościowym.

Równania ruchu układu mają teraz postać:

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x}_1 + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + Kx_1 + k(x_1 - x_2) &= m_1 e^{ivt}, \\ m\ddot{x}_2 + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

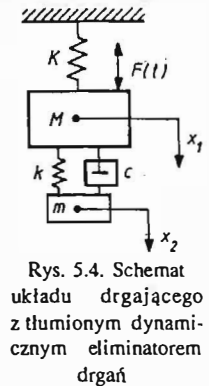
Siłę wymuszającą przedstawiono tym razem w postaci liczby zespolonej. Rozwiązania poszukujemy również w postaci ogólnej (zespolonej):

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_1 &= \bar{x}_{01} e^{ivt}, \\ \bar{x}_2 &= \bar{x}_{02} e^{ivt}, \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

gdzie  $\bar{x}_{01}$  i  $\bar{x}_{02}$  oznaczają odpowiednio amplitudy zespolone drgań wymuszonych ciała o masie  $M$  oraz  $m$ .

Uwzględniając przewidywane rozwiązania (5.11) w równaniach (5.10) oraz dzieląc obie strony tych równań przez  $e^{ivt}$ , otrzymujemy układ równań algebraicznych

$$\left. \begin{aligned} -Mv^2 \bar{x}_{01} + ivc(\bar{x}_{01} - \bar{x}_{02}) + K\bar{x}_{01} + k(\bar{x}_{01} - \bar{x}_{02}) &= m_1 e^{iv^2}, \\ -mv^2 \bar{x}_{02} + ivc(\bar{x}_{02} - \bar{x}_{01}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$



Rys. 5.4. Schemat układu drgającego z tłumionym dynamicznym eliminatorem drgań

Wyznaczamy interesującą nas zależność

$$\bar{x}_{01} = m_1 e v^2 \frac{(k - m v^2) + i v c}{[(-M v^2 + K)(-m v^2 + k) - m v^2 k] + i v c (-M v^2 + K - m v^2)} \quad (5.13)$$

Chcemy przekształcić tę zależność do postaci  $\bar{x}_{01} = a + i b$ , a następnie wyznaczyć część rzeczywistą amplitudy  $x_{01} = a$ . Zauważmy, że ułamek wyrażenia (5.13) ma postać  $(A + iB)/(C + iD)$ . Mnożymy zatem licznik i mianownik przez  $(C - iD)$ , wykonujemy przekształcenia i otrzymujemy moduł w postaci  $[(A^2 + B^2)/(C^2 + D^2)]^{0,5}$ . W konsekwencji otrzymujemy wyrażenie na amplitudę drgań układu głównego w postaci

$$\bar{x}_{01} = m_1 e v^2 \sqrt{\frac{(k - m v^2)^2 + v^2 c^2}{[(-M v^2 + K)(-m v^2 + k) - m v^2 k]^2 + v^2 c^2 (-M v^2 + K - m v^2)^2}} \quad (5.14)$$

Aby przekształcić powyższe wyrażenie do postaci bezwymiarowej, wyciągamy przed pierwiastek iloczyn  $m \omega_{01}^2$  w liczniku oraz iloczyn  $m M \omega_{01}^4$  w mianowniku. Uwzględniając ponadto dodatkowe oznaczenia pomocnicze:

$$\frac{v}{\omega_{01}} = \alpha \quad - \text{stosunek częstości drgań wymuszonych do częstości drgań własnych układu głównego,}$$

$$\frac{\omega_{02}}{\omega_{01}} = f \quad - \text{stosunek częstości własnej eliminatora do częstości własnej układu,}$$

$$\frac{c}{2m \omega_{01}} = \gamma \quad - \text{bezwymiarowy współczynnik tłumienia eliminatora (odniesiony do } \omega_{01} \text{),}$$

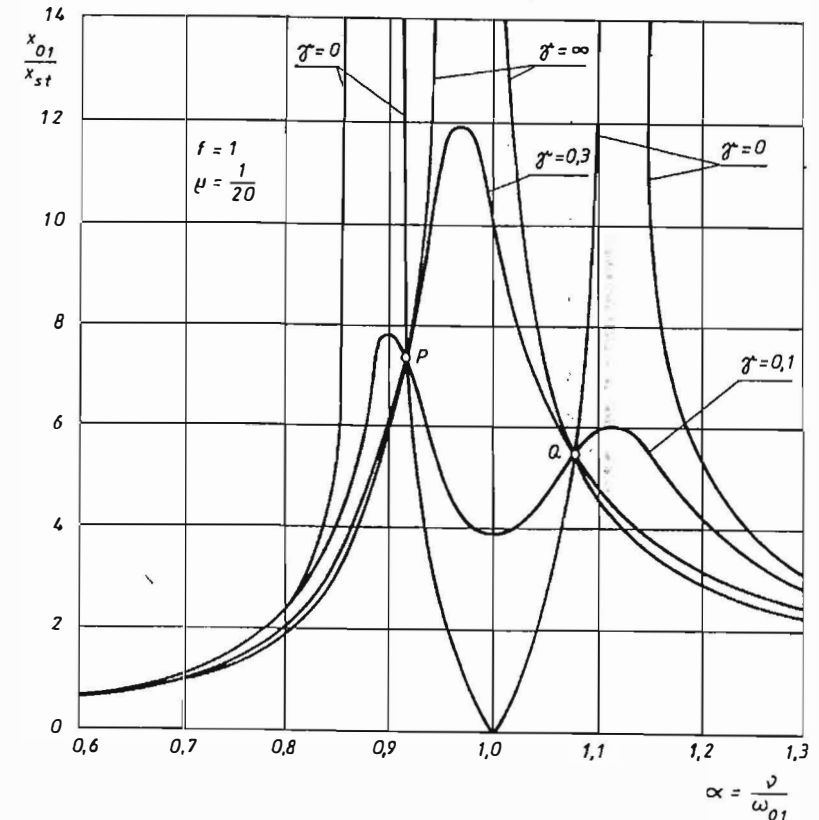
otrzymujemy

$$\frac{x_{01}}{x_{st}} = \alpha^2 \sqrt{\frac{(2\gamma\alpha)^2 + (f^2 - \alpha^2)^2}{(2\gamma\alpha)^2(1 - \alpha^2 - \mu\alpha^2)^2 + ((1 - \alpha^2)(f^2 - \alpha^2) - \mu f^2 \alpha^2)^2}} \quad (5.15)$$

Na rys. 5.5 przedstawiono przebiegi  $x_{01}/x_{st}$  w funkcji  $\alpha$  dla różnych wartości  $\gamma$ , przy ustalonych wartościach  $\mu = 0,05$  i  $f = 1$ .

Zadaniem tłumionego eliminatora drgań jest zmniejszenie amplitud drgań układu głównego w całym zakresie częstości. Najskuteczniejsze działanie eliminatora występuje wówczas, gdy praca tłumienia osiąga maksymalną wartość. Mówimy wówczas o eliminatorze optymalnym. Powstaje więc problem wyznaczenia wartości  $\gamma$  dla takiego eliminatora.

Wszystkie krzywe rezonansowe przedstawione na rys. 5.5 przecinają się w punktach  $P$  i  $Q$ , a zatem amplituda drgań wymuszonych nie zależy w tych punktach od współczynnika tłumienia  $\gamma$ . Dobierając eliminator optymalny, chcemy uzyskać taką sytuację, aby po pierwsze – oba charakterystyczne punkty ( $P$  i  $Q$ ) miały jednakowe rzędne i po drugie – aby krzywa rezonansowa miała oba maksima jak najbliżej tych punktów. Pierwszy warunek możemy spełnić przez odpowiedni dobór wartości  $f$  (stosunku częstości własnych



Rys. 5.5. Krzywe rezonansowe układu głównego z eliminatorem tłumionym przy  $f = 1$  i  $\mu = 0,05$

eliminators i układu głównego), czyli tzw. strojenie eliminatora. Zmiana wartości  $f$  pociąga bowiem za sobą przemieszczanie się, na przemian w górę i w dół, punktów  $P$  i  $Q$  wzdłuż krzywej uzyskanej dla  $\gamma = 0$ . Aby wyznaczyć wartość  $f$  dla tak nastrojonego eliminatora, zauważmy, na podstawie wzoru (5.15), że wartość stosunku  $x_{01}/x_{st}$  w postaci  $[(A\gamma^2 + B)/(C\gamma^2 + D)]^{0,5}$  nie zależy od wartości  $\gamma$ , jeśli stosunek  $A/C = B/D$ , to znaczy gdy

$$\left(\frac{1}{1 - \alpha^2 - \mu\alpha^2}\right)^2 = \left[\frac{f^2 - \alpha^2}{(1 - \alpha^2)(f^2 - \alpha^2) - \mu f^2 \alpha^2}\right]^2 \quad (5.16)$$

Lewą stronę ostatniego równania uzyskamy również, podstawiając w wyrażeniu  $\gamma = \infty$ , prawą zaś – jeśli podstawimy  $\gamma = 0$ . Opuszczając kwadraty, otrzymujemy

$$\frac{1}{1 - \alpha^2 - \mu \alpha^2} = \pm \frac{f^2 - \alpha^2}{(1 - \alpha^2)(f^2 - \alpha^2) - \mu f^2 \alpha^2}. \quad (5.17)$$

Uwzględniając znak plus otrzymujemy rozwiązanie trywialne  $\alpha^4 = 0$ , dla znaku minus otrzymujemy równanie kwadratowe względem  $\alpha^2$  w postaci

$$\alpha^4 - \frac{2(1 + f^2 + \mu f^2)}{2 + \mu} \alpha^2 + \frac{2f^2}{2 + \mu} = 0, \quad (5.18)$$

którego pierwiastki  $\alpha_P^2$  i  $\alpha_Q^2$  określają odcięte punktów  $P$  i  $Q$  w funkcji  $f$  i  $\mu$

$$\alpha_{P,Q}^2 = \frac{1}{2 + \mu} (1 + f^2 + \mu f^2) \mp [1 - 2f^2 + (1 + \mu)^2 f^4]^{0,5}. \quad (5.19)$$

Z porównania rzędnych punktów  $P$  i  $Q$  otrzymujemy

$$\frac{\alpha_P^2}{1 - \alpha_P^2(1 + \mu)} = - \frac{\alpha_Q^2}{1 - \alpha_Q^2(1 + \mu)}. \quad (5.20)$$

Dla uproszczenia rachunków przyjęto wartość  $\gamma = \infty$ , ponieważ, jak wcześniej napisano, wartość stosunku  $x_{01}/x_{st}$  nie zależy w tych punktach od  $\gamma$  (znak minus oznacza przesunięcie fazowe).

Po przekształceniach otrzymujemy

$$\frac{\alpha_P^2 + \alpha_Q^2}{\alpha_P^2 \alpha_Q^2} = 2(1 + \mu). \quad (5.21)$$

Wykorzystując wzory Viety, otrzymujemy z wyrażenia (5.18)

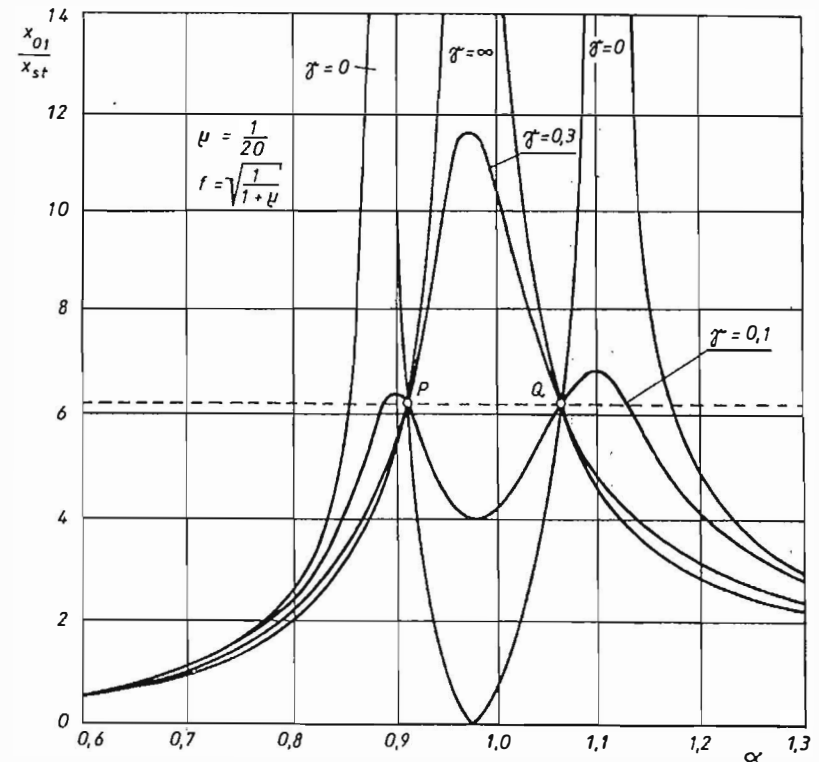
$$\frac{2(1 + f^2 + \mu f^2)(2 + \mu)}{(2 + \mu)2f^2} = 2(1 + \mu),$$

z którego po przekształceniach otrzymano wzór na „strojenie” eliminatora dla wymuszenia bezwładnościowego

$$f = \sqrt{\frac{1}{1 + \mu}}. \quad (5.22)$$

Rysunek 5.6 przedstawia krzywe rezonansowe układu głównego w przypadku tak nastroszonego eliminatora. Z wyrażenia (5.19) otrzymujemy odcięte punktów  $P$  i  $Q$  (w kwadratach) dla  $f$  określonego ze wzoru (5.22) w postaci

$$\alpha_{P,Q}^2 = \frac{1}{2 + \mu} \left[ 2 \pm \left( \frac{2\mu}{1 + \mu} \right)^{0,5} \right]. \quad (5.23)$$



Rys. 5.6. Krzywe rezonansowe układu głównego przy najkorzystniej dobranej częstotliwości własnej eliminatora

Rzędne punktów  $P$  i  $Q$  otrzymujemy z równania (5.20) po podstawieniu w miejsce  $\alpha_P^2$  lub  $\alpha_Q^2$  wyrażenia (5.23)

$$\frac{x_{01}}{x_{st}} = \frac{2 - \left( \frac{2\mu}{1 + \mu} \right)^{0,5}}{\left( \frac{2\mu}{1 + \mu} \right)^{0,5} (1 + \mu) - \mu}. \quad (5.24)$$

Pozostaje jeszcze dobrać odpowiednią wartość współczynnika tłumienia  $\gamma$ , aby uzyskać najbardziej pożądany przebieg krzywych rezonansowych. Jednym z kryteriów tego doboru może być postulat osiągnięcia przez krzywe rezonansowe maksimum w punkcie  $P$  lub  $Q$ . Należy więc zróżniczkować równanie (5.15) po  $\alpha$  i przyrównać do zera. Otrzymujemy w wyniku równanie dwukwadratowe względem  $\gamma$  w postaci

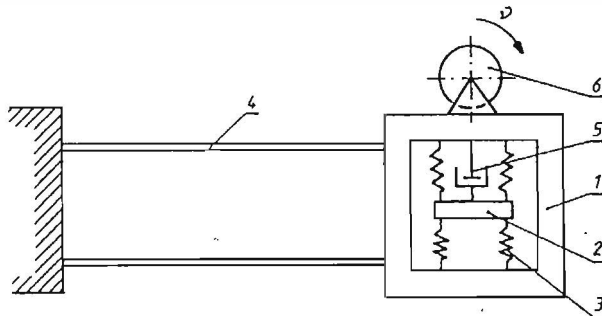
$$A\gamma^4 + B\gamma^2 + C = 0, \quad (5.25)$$

w którym współczynniki  $A$ ,  $B$  i  $C$  są funkcjami  $f$ ,  $\alpha$  oraz  $\mu$ .

Podstawiając za  $f$  wyrażenie (5.22), za  $\alpha^2$  – wartość odciętej punktu  $P$ , a następnie punktu  $Q$  wg wzoru (5.23), możemy otrzymać pierwiastki  $\gamma_P^2$  i  $\gamma_Q^2$  zależne od  $\mu$ , spełniające przyjęte kryterium.

## 5.2. Opis stanowiska

Schemat stanowiska wykorzystywanego w ćwiczeniu przedstawiono na rys. 5.7. Stanowisko zawiera następujące elementy: 1 – układ główny o masie  $M$  podwieszony na płaskich sprężynach (4), 2 – eliminator o masie  $m$  podwieszony na sprężynach (3) i zawierający tłumik (5), 6 – wzbudnik drgań. Stosunek masy eliminatora do masy układu głównego  $\mu$  wynosi ok. 0,05, natomiast stosunek częstości własnej eliminatora do częstości własnej układu głównego  $f = 1$ . Układ główny jest wprawiany w drgania za pomocą wzbudnika (wibratora) o charakterze bezwładnościowym. Sposób pomiaru drgań jest objaśniany podczas ćwiczenia. Możliwe jest zablokowanie eliminatora z układem głównym, co odpowiada układowi o jednym stopniu swobody o masie  $M + m$  lub układowi z eliminatorem o tłumieniu nieskończenie dużym ( $\gamma = \infty$ ).



Rys. 5.7. Schemat stanowiska

## 5.3. Przebieg ćwiczenia

1. Zarejestrować przebieg drgań układu głównego ze zablokowanym eliminatorem przy wolnym przesuwie papieru i płynnej zmianie prędkości obroto-

wej wibratora (parametry przyrządów rejestrujących – wzmocnienie, prędkość przesuwu papieru itp. podaje prowadzący).

2. Zarejestrować przebiegi czasowe drgań układu głównego przy różnych (ustalonych) prędkościach obrotowych wibratora; zanotować wartości tych prędkości i pozostałe parametry pomiaru.

3. Wykonać pomiary wg punktów 1 i 2 przy odblokowanym eliminatorze.

4. Na podstawie przeprowadzonych pomiarów narysować krzywe rezonansowe dla obu przypadków; porównać uzyskane krzywe z przebiegami teoretycznymi krzywych rezonansowych zamieszczonymi w instrukcji.

## 5.4. Treść sprawozdania

W sprawozdaniu należy zamieścić:

- 1) przebiegi drgań układu uzyskane podczas ćwiczenia,
- 2) krzywe rezonansowe narysowane na podstawie pomiarów,
- 3) wnioski dotyczące porównania wyników doświadczalnych z teoretycznymi.

## LITERATURA

- [1] Osiński Z., Tłumienie drgań mechanicznych, PWN, Warszawa 1979.
- [2] Den Hartog J. P., Drgania mechaniczne, PWN, Warszawa 1971.