

## Ćwiczenie 2

### ANALIZA KINEMATYCZNA MECHANIZMU KRZYWKOWEGO

#### 2.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest przeprowadzenie analizy kinematycznej płaskiego mechanizmu krzywkowego, tj. określenie przebiegu przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia popychacza w funkcji kąta obrotu krzywki. W ćwiczeniu zastosowano metodę analityczną oraz metodę różniczkowania graficznego.

#### 2.2. Wprowadzenie teoretyczne

Parametry kinematyczne mechanizmu krzywkowego uzależnione są od ukształtowania zarysu krzywki oraz od rodzaju popychacza i sposobu jego współpracy z krzywką. Dobór tych cech mechanizmu jest uwarunkowany funkcją, jaką spełnia on w maszynie. Ogólnie, zarys krzywki może być bardzo skomplikowany, trudny do analitycznego opisu lub wręcz niemożliwy. Jednak wiele krzywek, których zarys stanowią regularne linie (np. krzywka kołowa) lub kombinacje odcinków takich linii (np. krzywka styczna, której zarys składa się z kół i odcinków prostych lub krzywka syntetyczna o zarysie złożonym z odcinków sinusoid, parabol i łuków kół), można zaprojektować analitycznie. Znajomość funkcji opisującej zarys krzywki jest istotna z tego powodu, że umożliwia analityczne wyznaczenie przebiegu przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia popychacza w funkcji kąta obrotu krzywki. W przeciwnym wypadku wielkości te można wyznaczyć jedynie na drodze doświadczalnej, stosując odpowiednie czujniki pomiarowe i urządzenia różniczkująco-calkujące lub też posługując się metodą graficznego różniczkowania.

#### 2.3. Metoda analityczna określania kinematyki mechanizmu krzywkowego

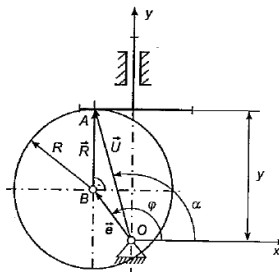
##### 2.3.1. Krzywka mimośrodowa współpracująca z popychaczem talerzykowym (rys. 2.1)

Równanie wektorowe opisujące położenie popychacza ma postać

$$\vec{e} + \vec{R} = \vec{u}. \quad (2.1)$$

Równania rzutów na osie  $x$  i  $y$  dają się wyrazić następująco

$$\left. \begin{aligned} e \cos \varphi + R \cos 90^\circ &= u \cos \alpha, \\ e \sin \varphi + R \sin 90^\circ &= u \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$



Rys. 2.1. Krzywka mimośrodowa współpracująca z popychaczem talerzykowym

Równanie ruchu popychacza w przyjętym układzie współrzędnych  $Oxy$  ma postać

$$y = e \sin \varphi + R, \quad (2.3)$$

gdzie:  $e$  – mimośród krzywki,  $e = (y_{\max} - y_{\min})/2$ ,

$\varphi$  – kąt obrotu krzywki liczony od osi  $x$ ,

$R$  – promień zarysu krzywki,  $R = D/2$ .

Zakładamy, że krzywka wykonuje jednostajny ruch obrotowy wokół osi przechodzącej przez punkt  $O$ . Wówczas

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \varepsilon = 0.$$

Prędkość i przyspieszenie popychacza wyznaczmy różniczkując względem czasu równanie (2.3)

$$v = \frac{dv}{dt} = e \omega \cos \varphi, \quad (2.4)$$

$$p = \frac{dv}{dt} = -e \omega^2 \sin \varphi. \quad (2.5)$$

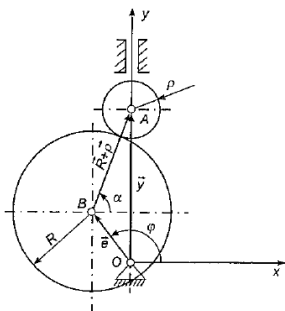
##### 2.3.2. Krzywka mimośrodowa współpracująca z popychaczem rolkowym (rys. 2.2)

Równanie wektorowe opisujące położenie popychacza ma postać

$$\vec{R} + \vec{p} + \vec{e} = \vec{y}. \quad (2.6)$$

Równania rzutów na osie  $x$  i  $y$  dają się wyrazić następująco

$$\left. \begin{aligned} e \cos \varphi + (R + \rho) \cos \alpha &= y \cos 90^\circ, \\ e \sin \varphi + (R + \rho) \sin \alpha &= y \sin 90^\circ. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$



Rys. 2.2. Krzywka mimośrodowa współpracująca z popychaczem rolkowym

Równanie ruchu popychacza w przyjętym układzie współrzędnych  $xy$  ma postać

$$y = e \left( \sin \varphi + \sqrt{m^2 - \cos^2 \varphi} \right), \quad (2.8)$$

gdzie:  $e, R, \varphi$  – oznaczenia jak wyżej,  
 $m$  – bezwymiarowy parametr,  $m = (R + \rho)/e$ ,  
 $\rho$  – promień rolki popychacza.

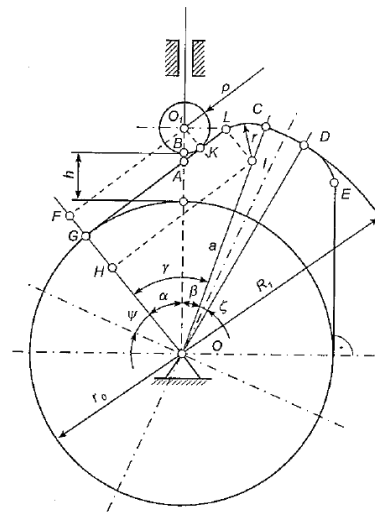
Przyjmując jak poprzednio, tzn.  $\omega = \text{const}$ ,  $\varepsilon = 0$ , można wyznaczyć prędkość i przyspieszenie popychacza różniczkując równanie (2.8)

$$v = \frac{dy}{dt} = e \omega \left( \cos \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2\sqrt{m^2 - \cos^2 \varphi}} \right), \quad (2.9)$$

$$p = \frac{dv}{dt} = -e \omega^2 \left( \sin \varphi - \frac{\cos 2\varphi}{\sqrt{m^2 - \cos^2 \varphi}} + \frac{\sin^2 2\varphi}{\sqrt{(m^2 - \cos^2 \varphi)^3}} \right). \quad (2.10)$$

### 2.3.3. Krzywka styczna współpracująca z popychaczem rolkowym

Podzielono obszar czynnej współpracy krzywki z popychaczem na dwa przedziały. Przedział pierwszy obejmuje współpracę popychacza rolkowego z prostoliniowym odcinkiem zarysu krzywki stycznej, zaś drugi – współpracę w zakresie zarysu łukowego krzywki. Podział jest konieczny ze względu na to, że w każdym przedziale jest inny mechanizm równoważny. Współpracę w zakresie przedziału pierwszego przedstawiono na rys. 2.3.



Rys. 2.3. Krzywka styczna współpracująca na bocznej części z popychaczem rolkowym

Równanie wzniosu popychacza ma postać

$$h = OA + O_1A - \rho - r_0; \quad (2.11)$$

$$\text{z } \Delta OAG - OA = \frac{r_0}{\cos \alpha}, \text{ z } \Delta AKO_1 \rightarrow O_1A = \frac{\rho}{\cos \alpha},$$

ostatecznie

$$h = \frac{(r_0 + \rho)(1 - \cos \alpha)}{\cos \alpha}. \quad (2.12)$$

Przyjmując, że krzywka wykonuje jednostajny ruch obrotowy wokół osi przechodzącej przez punkt  $O$  ( $\omega = \text{const}$ ), można wyznaczyć prędkość i przyspieszenie popychacza różniczkując równanie (2.12)

$$v = \frac{dh}{dt} = \omega(r_0 + \rho) \frac{\text{tg } \alpha}{\cos \alpha}, \quad (2.13)$$

$$p = \frac{dv}{dt} = \frac{\omega^2(r_0 + \rho)(2 - \cos^2 \alpha)}{\cos^3 \alpha}. \quad (2.14)$$

Należy określić kąt  $\alpha$ , odpowiadający odcinkowi  $GL$  zarysu krzywki (rys. 2.3), jeśli odcinek  $FO_1 = GL$

$$\text{z } \Delta OFO_1 \text{ i } \Delta OHI - (r_0 + \rho) \text{tg } \alpha = a \sin \gamma, \quad a = OI,$$

stąd

$$\text{tg } \alpha_{\max} = \frac{a \sin \gamma}{r_0 + \rho}, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_{\max}. \quad (2.15)$$

Na rys. 2.4 przedstawiono współpracę krzywki stycznej z popychaczem rolkowym w zakresie łuku krzywki o promieniu  $r$ . Równanie ruchu (wzniosu) popychacza ma postać

$$h = OO_1 - O_1F - OA, \quad (2.16)$$

gdzie  $O_1F = \rho$ ,  $OA = r_0$ ,  $OO_1 = OB + O_1B$ ;

$$\text{z } \Delta OBI \text{ i } \Delta BIO_1 - (r + \rho) \sin \alpha_1 = a \sin \beta,$$

stąd

$$\cos \alpha_1 = \sqrt{1 - \frac{a^2 \sin^2 \beta}{(r + \rho)^2}}, \quad (2.17)$$

zaś

$$OO_1 = a \cos \beta + (r + \rho) \cos \alpha_1. \quad (2.18)$$

Ostatecznie otrzymamy

$$h = a \left( \cos \beta + \sqrt{n_1^2 - \sin^2 \beta} \right) - \rho - r_0, \quad (2.19)$$

gdzie

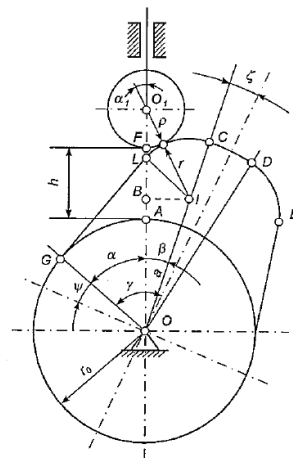
$$n_1 = \frac{\rho + r}{a}.$$

Różniczkując równanie (2.19) uzyskamy

$$v = \frac{dh}{dt} = -a \omega \left( \sin \beta + \frac{\sin 2\beta}{2\sqrt{n_1^2 - \sin^2 \beta}} \right), \quad (2.20)$$

$$p = -a \omega^2 \left( \cos \beta + \frac{\cos 2\beta}{\sqrt{n_1^2 - \sin^2 \beta}} + \frac{\sin^2 2\beta}{4\sqrt{(n_1^2 - \sin^2 \beta)^3}} \right). \quad (2.21)$$

Z rys. 2.3 wynika, że  $\beta_{\max} = \gamma - \alpha_{\max}$ ,  $\beta_{\max} \geq \beta \geq 0$ .



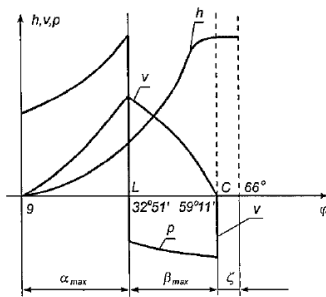
Rys. 2.4. Krzywka styczna współpracująca na górnej części z popychaczem rolkowym

Na rys. 2.5 pokazano przebieg wzniosu  $h$ , prędkości  $v$  i przyspieszenia  $p$  popychacza rolkowego, współpracującego z krzywką styczną w funkcji kąta obrotu krzywki. Dane mechanizmu krzywkowego są następujące:

$$a = 16,4 \text{ mm}; \quad r = 3,4 \text{ mm}; \quad \rho = 10,0 \text{ mm}; \quad \gamma = 59^\circ 11';$$

$$\zeta = 6^\circ 49'; \psi = 24^\circ; r_0 = 11,8 \text{ mm}; 0,0 \leq \alpha \leq 32^\circ 51';$$

$$26^\circ 20' \geq \beta \geq 0,0; 0,0 \leq \zeta \leq 6^\circ 49'.$$



Rys. 2.5. Przebieg wzniosu, prędkości i przyspieszenia popychacza rolkowego współpracującego z krzywką stycznią

### 2.3.4. Metoda wykresów czasowych

Analiza przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia popychacza w zakresie pełnego cyklu ruchu mechanizmu może być przeprowadzona metodą wykresów czasowych. W tym celu należy dla badanego mechanizmu krzywkowego sporządzić w przyjętej podziałce wykres przemieszczenia popychacza w funkcji czasu  $y = y(t)$  (rys. 2.6a). Jeżeli przyjmiemy, że ruch obrotowy krzywki odbywa się ze stałą prędkością obrotową  $n$  [obr/min], wówczas wystarczy zbudować wykres przemieszczenia popychacza w zależności od kąta obrotu krzywki. Przemieszczenie  $y$  popychacza należy odmierzyć na wykresie w bezwymiarowej podziałce przemieszczeń  $\kappa_t$

$$\kappa_t = \frac{y}{(y)}, \quad (2.22)$$

gdzie:  $y$  – wartość rzeczywista przemieszczenia [mm],  
 $(y)$  – wartość rysunkowa przemieszczenia [mm].

Podobnie, kąt obrotu w podziałce  $\kappa_\varphi$

$$\kappa_\varphi = \frac{\varphi}{(\varphi)} \quad [^\circ/\text{mm}], \quad (2.23)$$

gdzie:  $\varphi$  – wartość rzeczywista kąta obrotu  $[^\circ]$ ,  
 $(\varphi)$  – wartość rysunkowa kąta obrotu [mm].

Łatwo zauważyć, że obrotowi krzywki o kąt  $\varphi = 1^\circ$  odpowiada czas  $t = 1/6n$  [s], gdzie  $n$  jest prędkością obrotową krzywki w obr/min. Wprowadzając podziałki  $\kappa_\varphi$  i  $\kappa_t$  wniosek ten możemy zapisać w postaci równań

$$\varphi = 1^\circ = \kappa_\varphi(\varphi), \quad t = \frac{1}{6n} [\text{s}] = \kappa_t(t). \quad (2.24)$$

Ponieważ wartości rysunkowe kąta obrotu i odpowiadającego mu czasu są sobie równe ( $(\varphi) = (t)$ ), więc

$$\kappa_t = \kappa_\varphi \frac{1}{6n} \quad [\text{s}/\text{mm}]. \quad (2.25)$$

Wykres czasowy prędkości można otrzymać różniczkując graficznie przebieg przemieszczenia popychacza  $y = y(t)$  (rys. 2.6b). W tym celu odmierzaamy na osi  $t$  punkty 1, 2, 3 itd., dzieląc wykres  $y = y(t)$  na pewną liczbę przedziałów. Miarą średniej prędkości w każdym przedziale jest tangens kąta nachylenia siecznej, łączącej odpowiednie punkty wykresu. Na przykład średnia prędkość w przedziale 1-2 ma wartość

$$v_{sr12} = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = \frac{[(22)' - (11)']\kappa_t}{(12)\kappa_t} = \frac{\kappa_t}{\kappa_t} \text{tg } \alpha_{12} \quad [\text{mm}/\text{s}]. \quad (2.26)$$

Wykres prędkości kreślimy pod wykresem przemieszczenia popychacza. Obieramy biegun  $H_1$  na osi  $t$  w odległości biegunowej  $h_1$  od początku układu. Kreślimy proste  $H_11''$ ,  $H_12''$  itd., równoległe odpowiednio do siecznych  $0'1'$ ,  $1'2'$  itd. Można stwierdzić, że miary odcinków  $(01'')$ ,  $(02'')$  itd. są proporcjonalne do prędkości średnich w odpowiednich przedziałach czasu. Na przykład miara odcinka  $(02'')$

$$(02'') = h_1 \text{tg } \alpha_{12} = h_1 \frac{\kappa_t}{\kappa_t} v_{sr12} \quad [\text{mm}]. \quad (2.27)$$

Związek ten określa jednocześnie podziałkę wykresu prędkości  $\kappa_v$

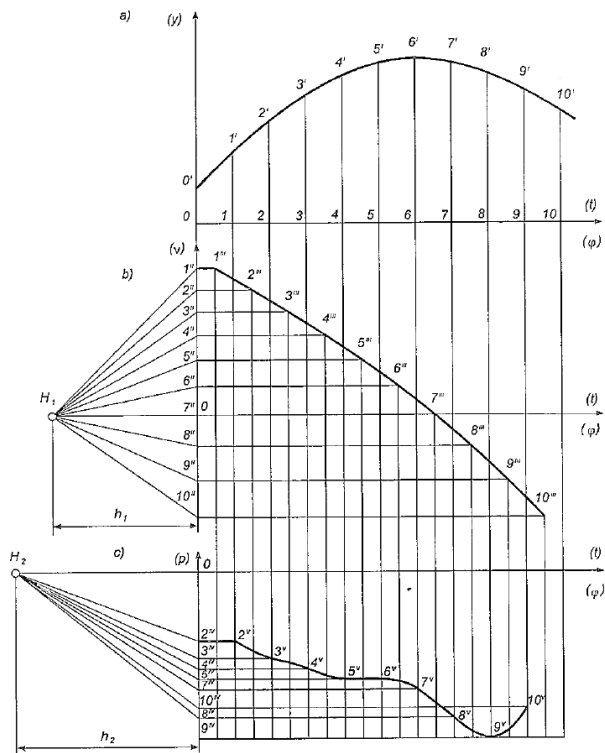
$$\kappa_v = \frac{v_{sr}}{(v_{sr})} = \frac{\kappa_t}{h_1 \kappa_t} \quad [1/\text{s}]. \quad (2.28)$$

Uwzględniając (2.25) otrzymamy

$$\kappa_v = \kappa_t \frac{1}{h_1} \frac{6n}{\kappa_\varphi} \quad [1/\text{s}], \quad (2.29)$$

gdzie:  $h_1$  – biegunowa wykresu prędkości [mm],  
 $n$  – prędkość obrotowa krzywki [obr/min].

Określone w wyniku omówionej konstrukcji rzędne wykresu prędkości odmierzaamy w połowie odpowiednich przedziałów. Przez graficzne różniczo-



Rys. 2.6. Metoda wykresów czasowych

wanie otrzymanego wykresu  $v = v(t)$  możemy w analogiczny sposób wykreślić przybliżony wykres czasowy przyspieszenia popychacza (rys. 2.6c). Podziałkę wykresu przyspieszenia ustalamy podobnie jak wykresu prędkości

$$\kappa_p = \frac{\kappa_v}{h_2 \kappa_t} [1/s^2]. \quad (2.30)$$

Uwzględniając (2.25) i (2.29) otrzymamy

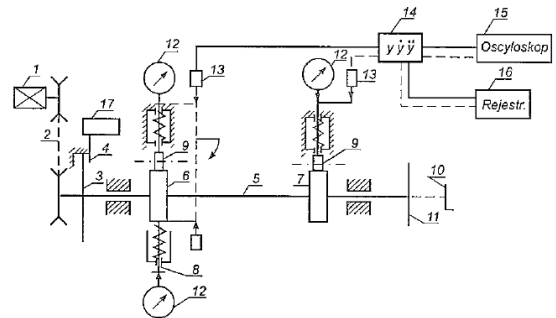
$$\kappa_p = \kappa_t \frac{1}{h_1 h_2} \left( \frac{6n}{\kappa_\varphi} \right)^2 [1/s^2], \quad (2.31)$$

gdzie:  $h_1$  – biegunowa wykresu prędkości [mm],  
 $h_2$  – biegunowa wykresu przyspieszenia [mm].

Przeprowadzając analizę kinematyczną mechanizmów metodą różniczkowania graficznego należy pamiętać, że duży wpływ na dokładność uzyskanych wykresów, oprócz staranności przy ich wykonywaniu, ma odpowiedni podział wykresu na odcinki przed przystąpieniem do różniczkowania graficznego.

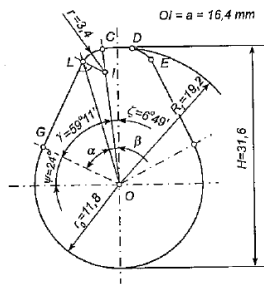
## 2.4. Opis stanowiska

Schemat ideowy stanowiska przedstawiono na rys. 2.7. Walek krzywkowy 5 z krzywką mimośrodową 6 i styczną 7 ułożony jest w obudowie stanowiska. Walek ten napędzany jest poprzez silnik prądu stałego 1 za pośrednictwem przekładni pasowej 2 z napinaczem. Krzywka mimośrodowa 6 może współpracować jednocześnie z popychaczem talerzykowym 8 i rolkowym 9. Walek krzywkowy 5 może również być obracany ręcznie za pomocą korbki 10. Na



Rys. 2.7. Schemat stanowiska

tarczy 11 zamocowanej do korpusu stanowiska naniesiono podziałkę kątową. Odczytów wzniosów popychaczy dokonuje się z czujników zegarowych 12. Prędkość obrotową wałka krzywkowego można odczytywać na obrotomierzu cyfrowym 17, do którego sygnał elektryczny przekazywany jest z fotokomórki 4. Tarcza 3 zamocowana do wałka 5 ma na obwodzie otwórki. Czujnik indukcyjny 13 współpracuje z przystawką pomiarową 14, umożliwiającą obserwację na oscyloskopie 15 przebiegu przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia popychacza. Czujnik indukcyjny osadzony jest w specjalnym ramieniu obrotowym. Ramię to obraca się wokół osi krzywek. Na rys. 2.8 przedstawiono zarys i wymiary krzywki stycznej. Zastosowana krzywka mimośrodowa ma zarys kołowy o średnicy  $\phi 28,6 \text{ mm}$ ,  $e = 2,98 \text{ mm}$ .



Rys. 2.8. Zarys i wymiary krzywki stycznej współpracującej z popychaczem rolkowym

## 2.5. Przebieg ćwiczenia

- Wykonać pomiary wzniosu popychacza talerzykowego, współpracującego z krzywką mimośrodową. Odczytu wzniosu z czujnika zegarowego dokonywać co  $10^\circ$  w zakresie obrotu krzywki od  $0^\circ$  do  $360^\circ$ . Pomiary powtórzyć trzykrotnie.
- Wykonać pomiary wzniosu popychacza rolkowego, współpracującego z krzywką mimośrodową. Odczytu dokonuje się jak wyżej. Pomiary powtórzyć trzykrotnie.
- Wykonać pomiary wzniosu popychacza rolkowego, współpracującego z krzywką styczną. Odczytu wzniosu z czujnika zegarowego dokonywać co  $10^\circ$  w zakresie czynnej współpracy popychacza z krzywką. Pomiary powtórzyć trzykrotnie.

- Uruchomić stanowisko i nastawić obroty mechanizmu krzywkowego wg wskazań prowadzącego ćwiczenie. Odczytu wskazań prędkości obrotowej dokonuje się z miernika obrotów.
- Nastawić pokrętko przystawki pomiarowej kolejno na przebieg przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia. Przebiegi te można obserwować na ekranie oscyloskopu i zarejestrować na rejestratorze. Wyniki pomiarów zapisać w tabelicy 2.1.

Tabela 2.1

Zestawienie wyników pomiarów

Polożenie	Kąt obrotu	Krzywka mimośrodowa, popychacz talerzykowy				Krzywka mimośrodowa, popychacz rolkowy				Krzywka styczna, popychacz rolkowy					
		I	II	III	$\Sigma_{gr}$	I	II	III	$\Sigma_{gr}$	I	II	III	$\Sigma_{gr}$		
0															
I															
:															
36															

## 2.6. Treść sprawozdania

W sprawozdaniu należy zamieścić:

- Schemat stanowiska, krótki opis ćwiczenia i pomiarów.
- Wykresy wzniosu popychaczy wykonane na podstawie pomiarów przeprowadzonych w punktach 1, 2, i 3 „Przebiegu ćwiczenia” oraz wykresy prędkości i przyspieszeń popychaczy, wykonane metodą różniczkowania graficznego.
- Wykresy wzniosu, prędkości i przyspieszeń popychaczy, wyznaczone metodą wg wzorów podanych w punktach 2.3.1, 2.3.2 i 2.3.3.
- Wykresy otrzymane z rejestratora.
- Wnioski wynikające z porównania wyników uzyskanych metodą różniczkowania graficznego i metodą analityczną z wynikami otrzymanymi z rejestratora.

## LITERATURA

- Oderfeld J.: Wstęp do mechanicznej teorii maszyn. WNT, Warszawa 1962.
- Morecki A., Trzaska S.: Zajęcia dydaktyczne z mechanicznej teorii maszyn. WNT, Warszawa 1964.
- Osiński Z.: Teoria maszyn i podstawy automatyki. Część I. WPW, Warszawa 1974.
- Oledzki A.: Mechanizmy krzywkowe. WNT, Warszawa 1966.
- Matzke Wł.: Rozrząd silników wysokoprężnych. WKŁ, Warszawa 1967.
- Kolacin T.: Podstawy teorii maszyn i automatyki. WPW, Warszawa 1995.