

## Ćwiczenie 1

# WYZNACZANIE PRĘDKOŚCI I PRZYSPIESZEŃ PUNKTÓW MECHANIZMU PŁASKIEGO METODĄ WYKREŚLĄ I ANALITYCZĄ

### 1.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie prędkości i przyspieszeń punktów mechanizmu płaskiego metodą toru odcelowanego i metodą analityczną oraz porównanie wyników otrzymanych tymi metodami.

### 1.2. Wprowadzenie teoretyczne

Analiza mechanizmów płaskich polega na wyznaczeniu położenia, prędkości i przyspieszenia wszystkich ich punktów. W kinematyce mechanizmów stosuje się metody wykresne, analityczne i numeryczne oraz ich kombinacje. Wybór metody zależy od rodzaju zagadnienia, wymaganej dokładności oraz od tego, czy badania trzeba wykonać jednokrotnie, czy też wielokrotnie.

W ćwiczeniu przedstawimy jedną z metod wykresnych – metodę toru odcelowanego oraz metodę analityczną.

#### 1.2.1. Metoda toru odcelowanego

Metoda ta pozwala w prosty i szybki sposób określić przebieg prędkości i przyspieszenia dowolnego punktu mechanizmu płaskiego.

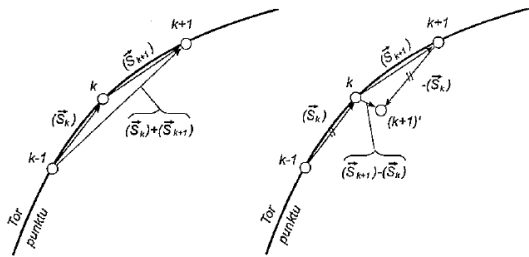
W tym celu wykresny w odpowiedniej podziałce długości  $\kappa_1$  tor punktu mechanizmu płaskiego cechujemy przez podział na odcinki, odpowiadające równym przedziałom czasowym  $\Delta t$ .

Podziałką długości – z definicji – nazywamy stosunek rzeczywistej długości do długości przedstawionej na rysunku i oznaczamy przez  $\kappa_1$

$$\kappa_1 = \frac{\bar{l}}{(\bar{l})}$$

Dla ruchu ustalonego, gdy  $\omega = \text{const}$ , przyrosty czasu  $\Delta t$  są proporcjonalne do przyrostu kąta obrotu członu napędzającego  $\Delta \alpha$ . Po dokonaniu cełowania toru punktu, w celu wyznaczenia prędkości i przyspieszenia, np.

w punkcie oznaczonym na torze przez  $k$ , postępujemy jak pokazano na rys. 1.1.



Rys. 1.1. Wyznaczanie prędkości i przyspieszenia punktu mechanizmu metodą toru odcchowanego

Prędkość rzeczywistą w punkcie  $k$  wyznaczmy jako średnią prędkość ze średnich prędkości poprzedzających punkt  $k$  (z przedziału  $k-1, k$ ) oraz następujących po punkcie  $k$  (z przedziału  $k, k+1$ )

$$\bar{v}_k = \frac{1}{2} \left[ \frac{(\vec{S}_k) \alpha_t}{\Delta t} + \frac{(\vec{S}_{k+1}) \alpha_t}{\Delta t} \right] = \frac{[(\vec{S}_k) + (\vec{S}_{k+1})] \alpha_t}{2 \Delta t} \quad (1.1)$$

Przyspieszenie rzeczywiste w punkcie  $k$  wyznaczmy jako przyrost średnich prędkości poprzedzających punkt  $k$  i następujących po punkcie  $k$  w czasie  $\Delta t$

$$\bar{p}_k = \frac{\frac{(\vec{S}_{k+1}) \alpha_t}{\Delta t} - \frac{(\vec{S}_k) \alpha_t}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{[(\vec{S}_{k+1}) - (\vec{S}_k)] \alpha_t}{\Delta t^2} \quad (1.2)$$

Wektor  $[(\vec{S}_k) + (\vec{S}_{k+1})]$  od punktu  $k-1$  do punktu  $k+1$  jest sumą geometryczną wektorów  $(\vec{S}_k)$  i  $(\vec{S}_{k+1})$  (rys. 1.1), natomiast wektor  $[(\vec{S}_{k+1}) - (\vec{S}_k)]$  wykreślony od punktu  $k$  do punktu  $(k+1)'$  jest różnicą geometryczną wektorów  $(\vec{S}_{k+1})$  i  $(\vec{S}_k)$  (rys. 1.1).

Wyznaczone ze wzorów (1.1) i (1.2) prędkości i przyspieszenia są prędkościami i przyspieszeniami średnimi w rozpatrywanych przedziałach czasowych.

Dla przedziałów czasu  $\Delta t$  dążących do zera, rozpatrywane prędkości i przyspieszenia średnie będą prędkościami i przyspieszeniami chwilowymi.

Podziałką prędkości – z definicji – nazywamy stosunek rzeczywistej prędkości do prędkości przedstawionej na rysunku i oznaczamy przez  $\alpha_v$

$$\alpha_v = \frac{\bar{v}}{(\bar{v})}$$

Oznaczając we wzorze (1.1) wyrażenie

$$\frac{\alpha_t}{2 \Delta t} = \alpha_v \quad (1.3)$$

jako podziałkę prędkości, wyrażenie  $[(\vec{S}_k) + (\vec{S}_{k+1})]$  przedstawia prędkość rysunkową w punkcie  $k$  (rys. 1.1).

Podziałką przyspieszenia – z definicji – nazywamy stosunek rzeczywistego przyspieszenia do przyspieszenia przedstawionego na rysunku i oznaczamy przez  $\alpha_p$

$$\alpha_p = \frac{\bar{p}}{(\bar{p})}$$

Oznaczając we wzorze (1.2) wyrażenie

$$\frac{\alpha_t}{\Delta t^2} = \alpha_p \quad (1.4)$$

jako podziałkę przyspieszenia, wyrażenie  $[(\vec{S}_{k+1}) - (\vec{S}_k)]$  przedstawia przyspieszenie rysunkowe w punkcie  $k$  (rys. 1.1).

W zastosowaniach praktycznych przedziały  $\Delta t$  nie są te same przy wyznaczaniu prędkości i przyspieszenia.

Ponieważ ruch mechanizmu jest najczęściej okresowy, tzn. po pewnym czasie  $T$  sekund powtarzają się położenia, prędkości i przyspieszenia każdego punktu, możemy przez  $n$  oznaczyć liczbę okresów na minutę. Przedziały czasu stosowane przy wyznaczeniu prędkości oznaczmy przez  $\Delta t_v$ , a dla przyspieszenia – przez  $\Delta t_p$ . Najlepiej tak je dobrać, aby stosunki

$$m_v = \frac{T}{\Delta t_v} \quad \text{i} \quad m_p = \frac{T}{\Delta t_p} \quad (1.5)$$

były liczbami całkowitymi, gdzie  $m_v$  i  $m_p$  oznaczają liczbę przedziałów na torze, używaną przy wyznaczaniu prędkości i przyspieszenia. Im większe są więc liczby przedziałów określone wyrażeniami (1.5), tym lepsze jest przybliżenie wzorów (1.1) i (1.2) na prędkość i przyspieszenie. Wtedy jednak błędy rysunkowe rosną, a ich wpływ jest znaczny, gdy punkty na torze odcchawanym zbliżają się do siebie. Istnieją więc takie wartości  $m_v$  i  $m_p$ , dla których błąd łączny jest najmniejszy. Dla wielkości rysunków spotykanych w praktyce między optymalnymi wartościami  $m_v$  i  $m_p$  zachodzi w przybliżeniu związek

$$m_p = \frac{1}{2} m_v \quad (1.6)$$

Dla uproszczenia zapisu będziemy oznaczali  $m_v = m$ , wobec tego

$$m_p = \frac{1}{2} m \quad (1.7)$$

Ponieważ  $T = 60/n$ , to na podstawie wzorów (1.5), (1.6) i (1.7) otrzymamy

$$\Delta t_v = \frac{60}{m n} \quad \text{i} \quad \Delta t_p = \frac{120}{m n}. \quad (1.8)$$

Ze wzorów (1.1), (1.2) i (1.8) wynika, że

$$\vec{v}_k = (\vec{v}_k) \kappa_v \quad \text{i} \quad \vec{p}_k = (\vec{p}_k) \kappa_p, \quad (1.9)$$

gdzie:  $\kappa_v$  – podziałka prędkości,  
 $\kappa_p$  – podziałka przyspieszeń

$$\kappa_v = \frac{\kappa_1 m n}{120} [\text{s}^{-1}], \quad \kappa_p = \frac{\kappa_1 m^2 n^2}{120^2} [\text{s}^{-2}]. \quad (1.10)$$

Najmniejsze błędy łączne, na które składa się z jednej strony przybliżenie wzorów (1.1) i (1.2), a z drugiej strony błędy rysunkowe, uzyskuje się dla  $m = 18$ , jeśli tor mieści się swobodnie na formacie A5 lub A4. Błąd w wyznaczaniu prędkości w pierwszym przypadku wynosi około 6%, a w wyznaczaniu przyspieszenia – około 12%. W drugim przypadku liczby te wynoszą odpowiednio 4% i 8%. Błędy te nie zawierają niedokładności w wyznaczaniu położenia punktów na torze odcachowanym. Może on mieć znaczny wpływ na dokładność wyników w płaskich częściach toru, zwłaszcza przy wyznaczaniu przyspieszenia.

### 1.2.2. Metoda analityczna

Zasada metod analitycznych polega na uzyskaniu algebraicznych związków określających położenia członów i toru punktów mechanizmu w czasie jego ruchu oraz ich prędkości i przyspieszenia.

Każdy mechanizm jako zamknięty łańcuch kinematyczny może być przedstawiony w postaci zamkniętego wieloboku wektorów określających chwilowe położenia jego członów

$$\sum_{i=1}^n \vec{l}_i = 0 \quad (1.11)$$

lub w postaci równań rzutów na osie  $x$  i  $y$

$$\left. \begin{aligned} \sum l_{ix} &= 0, \\ \sum l_{iy} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Prędkości i przyspieszenia członów mechanizmu otrzymamy z równań (1.12) poprzez kolejne ich różniczkowanie względem czasu

$$\sum \frac{dl_{ix}}{dt} = 0 \quad \text{i} \quad \sum \frac{dl_{iy}}{dt} = 0 \quad (1.13)$$

oraz

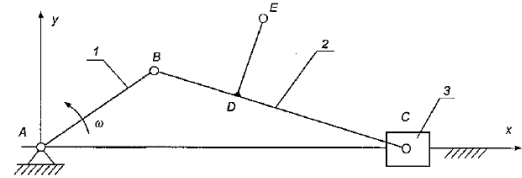
$$\sum \frac{d^2 l_{ix}}{dt^2} = 0 \quad \text{i} \quad \sum \frac{d^2 l_{iy}}{dt^2} = 0. \quad (1.14)$$

Kierunki rozważanych wektorów względem osi  $x$  przyjętego układu osi  $Oxy$  określamy kątami skierowanymi  $\alpha_i$ . Rzutowanie opisane wzorami (1.12) wykonuje się wtedy automatycznie

$$\left. \begin{aligned} l_{ix} &= l_i \cos \alpha_i \\ l_{iy} &= l_i \sin \alpha_i \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

uzyskując przy tym jednoznaczne określenie kierunku rozważanych wektorów w każdej chwili ruchu mechanizmu.

Rozpatrzmy mechanizm korbowo-wodzikowy przedstawiony na rys. 1.2, dla którego wyznaczymy prędkości i przyspieszenia wodzika (punktu  $C$ ) i punktu  $E$  połączonego z członem 2, w funkcji kąta obrotu członu napędowego przy założeniu, że  $\omega = \text{const}$ .



Rys. 1.2. Schemat kinematyczny mechanizmu korbowo-wodzikowego

Mechanizm korbowo-wodzikowy jest odmianą czworoboku przegubowego, dla którego parę obrotową zastąpiono parą postępową.

Człon mechanizmu korbowo-wodzikowego przedstawionego na rys. 1.2 zastąpiono wektorami, których położenia względem przyjętego układu współrzędnych  $xy$  określono kątami skierowanymi  $\alpha_i$  od osi  $x$  (w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara), aż do pokrycia się z wektorami zastępującymi człony mechanizmu – rys. 1.3.

Równanie wektorowe opisujące położenia członów mechanizmu korbowo-wodzikowego dla przyjętego układu wektorów – zgodnie z równaniem (1.11) – ma postać

$$\vec{r} + \vec{l} = \vec{w}. \quad (1.16)$$

W celu określenia toru punktu  $E$  związanego z członem 2 mechanizmu (rys. 1.3) należy napisać dodatkowe równanie wektorowe w postaci

$$\vec{c} = \vec{r} + \vec{a} + \vec{b}. \quad (1.17)$$

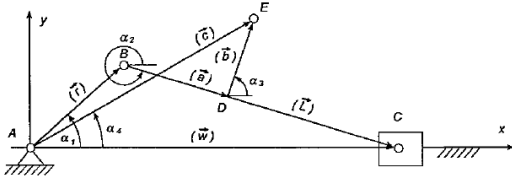
Równania rzutów na osie  $x$  i  $y$  – zgodnie z równaniem (1.12) – przyjmą postać

– z równania (1.16)

$$\left. \begin{aligned} w \cos 0 &= r \cos \alpha_1 + L \cos \alpha_2, \\ w \sin 0 &= r \sin \alpha_1 + L \sin \alpha_2, \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

– z równania (1.17)

$$\left. \begin{aligned} c \cos \alpha_4 &= r \cos \alpha_1 + a \cos \alpha_2 + b \cos \alpha_3, \\ c \sin \alpha_4 &= r \sin \alpha_1 + a \sin \alpha_2 + b \sin \alpha_3. \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$



Rys. 1.3. Schemat mechanizmu w postaci zamkniętego łańcucha wektorów

Jeśli uwzględnimy, że

$$c \cos \alpha_4 = x_E, \quad c \sin \alpha_4 = y_E, \quad \alpha_3 = \alpha_2 + 90^\circ,$$

równania (1.19) przyjmą postać

$$\left. \begin{aligned} x_E &= r \cos \alpha_1 + a \cos \alpha_2 - b \sin \alpha_2, \\ y_E &= r \sin \alpha_1 + a \sin \alpha_2 + b \cos \alpha_2. \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

Z równań (1.18) wyznaczmy przemieszczenie wózka oraz położenie członu 2 określone kątem  $\alpha_2$

$$w = r \cos \alpha_1 + L \cos \alpha_2, \quad (1.21)$$

$$\sin \alpha_2 = -\frac{r}{L} \sin \alpha_1. \quad (1.22)$$

W równaniach (1.20) i (1.21) kąt  $\alpha_2$  występuje również w funkcji cosinus. Uwzględniając, że

$$\cos \alpha_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2} = \sqrt{1 - \frac{r^2}{L^2} \sin^2 \alpha_1} \quad (1.23)$$

i rozwijając prawą stronę równania (1.23) w szereg potęgowy oraz odrzucając wyrazy rozwinięcia poczynając od trzeciego, zależność (1.23) przyjmie postać

$$\cos \alpha_2 \approx 1 - \frac{r^2}{2L^2} \sin^2 \alpha_1. \quad (1.24)$$

Jeśli uwzględnimy zależności (1.22) i (1.24) w równaniach (1.20) i (1.21), otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} x_E &= a + r \cos \alpha_1 + \frac{br}{L} \sin \alpha_1 - \frac{ar^2}{2L^2} \sin^2 \alpha_1, \\ y_E &= b + \frac{r}{L} (L - a) \sin \alpha_1 - \frac{br^2}{2L^2} \sin^2 \alpha_1 \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

oraz

$$w = r \cos \alpha_1 + L \left( 1 - \frac{r^2}{2L^2} \sin^2 \alpha_1 \right). \quad (1.26)$$

Prędkość i przyspieszenie wózka (punktu C) uzyskamy przez kolejne różniczkowanie równania (1.26), przy założeniu, że  $d\alpha_1/dt = \omega = \text{const}$

$$v_C = \frac{dw}{dt} = -r\omega \left( \sin \alpha_1 + \frac{r}{2L} \sin 2\alpha_1 \right) \quad (1.27)$$

oraz

$$p_C = \frac{dv_C}{dt} = -r\omega^2 \left( \cos \alpha_1 + \frac{r}{L} \cos 2\alpha_1 \right). \quad (1.28)$$

Prędkość i przyspieszenie punktu E otrzymamy przez kolejne różniczkowanie równań (1.25), przy założeniu, że  $d\alpha_1/dt = \omega = \text{const}$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_E &= -r\omega \sin \alpha_1 + \frac{br}{L} \omega \cos \alpha_1 - \frac{ar^2}{2L^2} \omega \sin 2\alpha_1, \\ \dot{y}_E &= \frac{r}{L} (L - a) \omega \cos \alpha_1 - \frac{br^2}{2L^2} \omega \sin 2\alpha_1, \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

stąd prędkość punktu E wyznaczmy ze wzoru

$$v_E = \sqrt{(\dot{x}_E)^2 + (\dot{y}_E)^2} \quad (1.30)$$

oraz

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_E &= -r\omega^2 \cos \alpha_1 - \frac{br}{L} \omega^2 \sin \alpha_1 - \frac{ar^2}{L^2} \omega^2 \cos 2\alpha_1, \\ \ddot{y}_E &= -\frac{r}{L} (L - a) \omega^2 \sin \alpha_1 - \frac{br^2}{L^2} \omega^2 \cos 2\alpha_1, \end{aligned} \right\} \quad (1.31)$$

stąd przyspieszenie punktu E wyznaczmy ze wzoru

$$p_E = \sqrt{(\ddot{x}_E)^2 + (\ddot{y}_E)^2}. \quad (1.32)$$

Zasadniczą zaletą metod analitycznych jest możliwość uzyskania ogólnych wyrażeń, pozwalających na wyznaczenie położenia, prędkości i przyspieszenia rozpatrywanego punktu mechanizmu, w funkcji parametrów członu napędzającego (położenia, prędkości, przyspieszenia).

Te ogólne wyrażenia na położenie, prędkość i przyspieszenie umożliwiają badanie zmienności przebiegu tych parametrów rozpatrywanego punktu mechanizmu. Przy wykonywaniu obliczeń liczbowych metody analityczne stwarzają możliwość zastosowania komputerowej techniki obliczeniowej. W przypadku wykorzystania nawet tradycyjnej techniki obliczeniowej, dokładność otrzymanych wyników jest duża, a zastosowanie komputerowej techniki obliczeniowej pozwala na uzyskiwanie niemalże dowolnie dużej dokładności obliczeń.

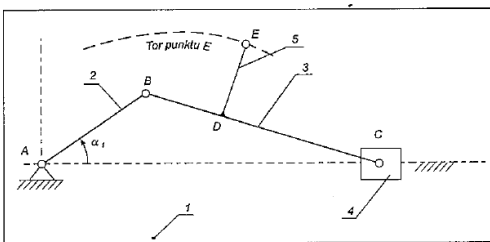
### 1.3. Opis stanowiska

Na płycie 1 (rys. 1.4) zamocowany jest mechanizm korbowo-wodzikowy składający się z korby 2, korbowodu 3, wodzika 4 oraz łącznika 5 przymocowanego do korbowodu.

Wymuszając ruch korby 2, wprawiamy mechanizm w ruch. Punkty mechanizmu wyznaczają różne tory. W ćwiczeniu analizowany jest tor punktu E.

### 1.4. Przebieg ćwiczenia

1. Ustawić łącznik na korbowodzie 3 w odległości wskazanej przez prowadzącego.
2. Obracać korbą 2, zgodnie z kierunkiem kąta skierowanego  $\alpha_1$ , pokazanego na rys. 1.4, wychodząc z położenia, dla którego  $\alpha_1 = 0$ . Zamocowany pisak w punkcie E łącznika wykreśli tor tego punktu. W trakcie wyznaczania toru punktu E należy zaznaczyć położenia punktu E, odpowiadające kolejnym położeniom korby co  $15^\circ$ , w zakresie od  $0^\circ$  do  $360^\circ$ . Jednakowym przyrostom kąta  $\Delta\alpha_1$  odpowiadać będą jednakowe przedziały czasowe  $\Delta t$ , przy założeniu ruchu ustalonego korby, tzn.  $\omega = \text{const}$ .



Rys. 1.4. Schemat mechanizmu z zaznaczonym torom punktu

3. Zaznaczyć co najmniej trzy punkty na torze odczekanym, dla których zostaną wyznaczone prędkości i przyspieszenia metodą analityczną. Przy doborze punktów należy co najmniej jeden z nich wybrać na części toru o największej krzywiznie.

### 1.5. Treść sprawozdania

W sprawozdaniu należy zamieścić:

1. Schemat i opis stanowiska.
2. Wykres toru odczekanego z wyznaczonymi wykreślnie prędkościami i przyspieszeniami punktów toru.
3. Hodograf prędkości i przyspieszeń z metody toru odczekanego.
4. Wyniki obliczeń prędkości i przyspieszeń dla co najmniej trzech punktów toru, wyznaczone metodą analityczną – tablica 1.1.

Tablica 1.1

Wielkości mierzone i obliczone			
Wielkości mierzone i zadane		Wielkości obliczone metodą analityczną	
$r =$	[m]	$v_{E1} =$	[m/s]
$L =$	[m]	$v_{E2} =$	[m/s]
$a =$	[m]		
$b =$	[m]	$p_{E1} =$	[m/s <sup>2</sup> ]
$n =$	[obr/min]	$p_{E2} =$	[m/s <sup>2</sup> ]
$\alpha_{11} =$	[°]		
$\alpha_{12} =$	[°]		
$\alpha_{13} =$	[°]		

5. Porównanie wyników z metody toru odczekanego i metody analitycznej dla zadanych punktów toru.
6. Wnioski z uwzględnieniem dokładności obydwu metod, źródeł błędów, możliwości stosowania opisanych metod.

### LITERATURA

- [1] Bogusz W., Tomaszewski K.: Teoria maszyn i automatycznej regulacji. AGH, Kraków 1971.
- [2] Parszewski Z.: Teoria maszyn i mechanizmów. WNT, Warszawa 1967.
- [3] Olędzki A.: Podstawy teorii maszyn i mechanizmów. WNT, Warszawa 1987.
- [4] Kolacın T.: Podstawy teorii maszyn i automatyki. WPW, Warszawa 1995.