

Ćwiczenie 4

WYWAŻANIE DYNAMICZNE

4.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest praktyczne wyrównowanie (wyważenie) układu niewyważonego dynamicznie oraz wyznaczenie wartości sił bezwładności, występujących podczas wirowania tego układu (przed wyważeniem).

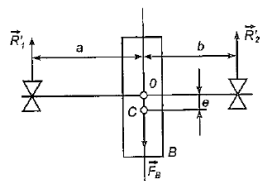
4.2. Wprowadzenie teoretyczne

Jak wiadomo z mechaniki ogólnej, z niewyrównoważeniem elementów wirujących mamy do czynienia w ogólnym przypadku wówczas, gdy oś obrotu ciała nie pokrywa się z jego główną centralną osią bezwładności [1].

Rozróżniamy dwa szczególne przypadki:

a. Środek masy ciała C nie leży na osi obrotu (rys. 4.1).

Jeśli takie ciało o masie m wprawimy w ruch obrotowy z prędkością ω , powstaje wirująca siła odśrodkowa \vec{F}_B



Rys. 4.1. Schemat układu niewyrównowanego statycznie

$$F_B = m e \omega^2, \quad (4.1)$$

wywołująca reakcje dynamiczne w łożyskach

$$R_1' = F_B \frac{b}{a+b}, \quad (4.2)$$

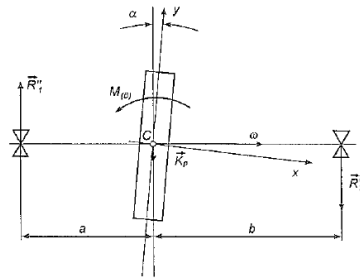
$$R_2' = F_B \frac{a}{a+b}. \quad (4.3)$$

Zależności opisujące reakcje R_1' i R_2' można również uzyskać korzystając np. z twierdzenia o pędzie. Wyrównowanie w tym przypadku można osiągnąć przykładając dodatkowe ciało o masie m_d na promieniu r_d po przeciwnej stronie w stosunku do środka masy C . Spełniony być musi wówczas warunek

$$m_d r_d = m e. \quad (4.4)$$

Niewyrównoważenie takie nazywa się statycznym, ponieważ można je zlikwidować w sposób statyczny.

b. Oś obrotu ciała nie jest jego główną osią bezwładności (rys. 4.2).



Rys. 4.2. Schemat układu niewyrównowanego dynamicznie

Dla przypadku przedstawionego na rys. 4.2 środek masy tarczy leży na osi obrotu, nieprostokątne zamocowanie tarczy powoduje jednak, że wektor krętu ciała nie pokrywa się z osią obrotu. Podczas wirowania tarczy siły bezwładności doznaje przyrostu geometrycznego, wywołując reakcje dynamiczne \vec{R}_1'' i \vec{R}_2'' , które stanowią parę sił o momencie \vec{M}_R , przy czym

$$|\vec{M}_R| = K_p \omega, \quad (4.5)$$

gdzie

$$K_p = K_y \cos \alpha - K_x \sin \alpha = -\frac{1}{8} m r^2 \omega \sin 2\alpha. \quad (4.6)$$

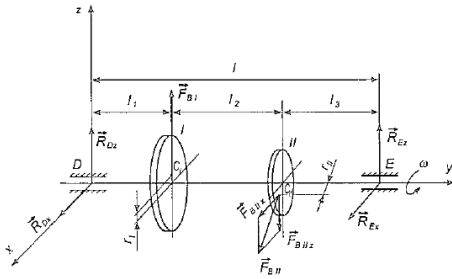
Dla wyrównowania takiego układu należy przyłożyć dodatkowe ciała w dwóch płaszczyznach, tak aby w czasie wirowania tarczy siły bezwładności wywołane przyłożonymi ciałami dawały moment, równoważący moment od sił bezwładności niewyrównoważenia, czyli sprowadzały wektor krętu układu do osi obrotu. Wymaga to jednak stosowania specjalnych urządzeń zwanych wyważarkami, które umożliwiają określić potrzebną wielkość przykładanych ciał oraz miejsce ich przyłożenia.

4.3. Analiza układu badanego w ćwiczeniu

Badany układ składa się z dwu tarcz I i II, sztywno zamocowanych na wale podpartym w łożyskach D i E (rys. 4.3). Środki mas obu tarcz nie leżą na osi obrotu, ale są w taki sposób przesunięte, że cały układ można

traktować jako wyrównoważony statycznie (układ po obróceniu go o dowolny kąt pozostaje w nowym położeniu).

Na rys. 4.3 pokazano siły bezwładności \vec{F}_{BI} i \vec{F}_{BII} , występujące na poszczególnych tarczach, w pewnym chwilowym położeniu układu oraz wywołane nimi reakcje dynamiczne \vec{R}_D i \vec{R}_E , działające w łożyskach D i E .



Rys. 4.3. Siły bezwładności i reakcje dynamiczne w rozpatrywanym układzie

Znając masy obu tarcz m_I i m_{II} , przesunięcia ich środków mas r_I i r_{II} względem osi obrotu oraz wymiary układu możemy wyznaczyć reakcje \vec{R}_D i \vec{R}_E . Korzystając z zasad kinetostatyki możemy ułożyć cztery równania równowagi, pozwalające wyznaczyć składowe reakcje działające w płaszczyznach prostopadłych do osi obrotu

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{ix} &= R_{Dx} + R_{Ex} + F_{BIx} = 0, \\ \sum F_{iz} &= R_{Dz} + R_{Ez} + F_{BIz} - F_{BIIz} = 0, \\ \sum M_{ix} &= F_{BI}l_1 - F_{BIIz}(l_1 + l_2) + R_{Ez}l = 0, \\ \sum M_{iz} &= -F_{BIIz}(l_1 + l_2) - R_{Ex}l = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

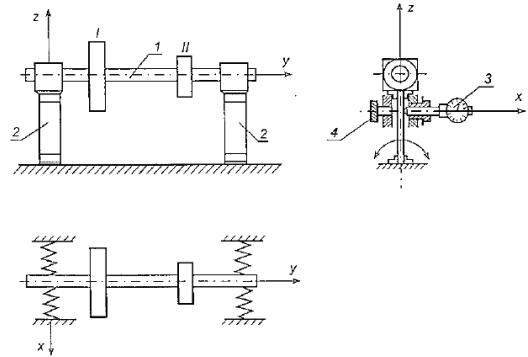
stąd

$$\left. \begin{aligned} R_{Dx} &= -F_{BIx} \frac{l_3}{l}, \\ R_{Dz} &= -F_{BIz} \frac{l_2 + l_3}{l} + F_{BIIz} \frac{l_3}{l}, \\ R_{Ex} &= -F_{BIIz} \frac{l_1 + l_2}{l}, \\ R_{Ez} &= -F_{BIz} \frac{l_1}{l} + F_{BIIz} \frac{l_1 + l_2}{l}, \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

W praktyce założone wielkości nie są znane i zadaniem wyrównowazania jest, jak już powiedziano, znaleźć odpowiednie wartości dodatkowych ciał oraz miejsce ich przyłożenia, aby sprowadzić do minimum (najlepiej do zera) wartości reakcji dynamicznych.

4.4. Opis stanowiska i metody wyważania

Wyważarka zastosowana w ćwiczeniu (rys. 4.4) składa się z dwóch niezależnych uchwytów łożyskowych D i E , połączonych z podstawą za pomocą płaskich sprężyn 2, które umożliwiają tym uchwytom wykonywanie drgań w płaszczyźnie xz . Amplitudę tych drgań mierzymy czujnikiem 3. Za pomocą śrub 4 możemy unieruchamiać sprężyny 2, a zatem i uchwyty łożysk D i E . W łożyskach osadzony jest niewyważony układ, składający się z dwu krążków I i II, sztywno zamocowanych na wale 1. Wał wprawiany jest w ruch obrotowy za pomocą silnika elektrycznego poprzez pasek klinowy.



Rys. 4.4. Schemat stanowiska

Podczas ruchu obrotowego układu powstają odśrodkowe siły bezwładności, stanowiące ogólny przypadek niewyważenia dynamicznego w postaci dwu sił ukośnych. Siły te, wirując wraz z układem, powodują powstawanie w łożyskach D i E wirujących reakcji dynamicznych. Odblokowanie sprężyn 2 pozwala obserwować drgania łożysk. Największe amplitudy drgań występują wówczas, gdy prędkość kątowa ω wirującego układu zrówna się z jego częstotliwością drgań własnych. Dlatego pomiaru amplitud drgań dokonujemy przy tej rezonansowej prędkości wirowania.

Wyważarki oparte na tej zasadzie działania noszą nazwę wyważarek rezonansowych. W praktyce stosuje się wyważarki o bardzo różnej konstrukcji, od prostych wyważarek rezonansowych aż do zautomatyzowanych agregatów zdolnych do samoczynnego wyznaczania i usuwania niewyważenia. Poza tym najczęściej wykorzystuje się wyważarki przystosowane do wyważania określonych elementów, np. wyważarki do kół samochodowych (mechaniczne, stroboskopowe), do wałów itp.

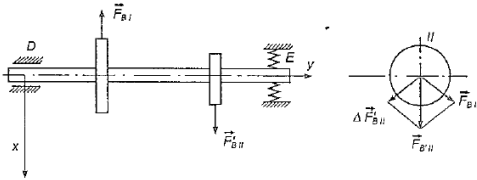
Zadaniem wyważania układu w omawianym ćwiczeniu jest sprowadzenie reakcji dynamicznych \vec{R}_D i \vec{R}_E do zera, a tym samym sprowadzenie do zera amplitud drgań łożysk D i E przy odblokowanych sprężynach.

W pracy [2] wykazano, że niezależnie od ilości i rozkładu sił bezwładności można wyrównoważyć każdy układ, przykładając ciała korekcyjne w dwóch płaszczyznach prostopadłych do osi wału. W naszym przykładzie ciała korekcyjne będziemy przykładać w płaszczyznach krążków I i II na promieniach R_I i R_{II} narzuconych konstrukcyjnie.

Wielkości ciał korekcyjnych wyznaczamy metodą kolejnych prób. Kierunki, na których będziemy je przykładać (tzw. kierunki korekcji), znajdziemy na podstawie sporządzanych wykresów biegunowych (według punktu 4.5.2).

Jeżeli odblokujemy łożysko E , a zablokujemy łożysko D (rys. 4.5) i przyłożymy odpowiednie ciało korekcyjne na znalezionym kierunku korekcji w płaszczyźnie tarczy II, to okaże się, że nawet przy prędkości rezonansowej amplituda drgań łożyska E jest bliska zera. Nastąpi to wówczas, gdy wypadkowa \vec{F}'_{BII} dwóch sił bezwładności koła II, nieznannej siły \vec{F}_{BII} oraz $\Delta\vec{F}'_{BII}$ wywołanej przez dodanie ciała korekcyjnego o masie $\Delta m'_{II}$, a więc

$$\vec{F}'_{BII} = \vec{F}_{BII} + \Delta\vec{F}'_{BII}, \quad (4.9)$$



Rys. 4.5. Schemat zamocowania układu przy wyznaczaniu masy $\Delta m'_{II}$ oraz położenia ciała korekcyjnego na kole II

znajdzie się w jednej płaszczyźnie z siłą \vec{F}_{BI} (płaszczyzna xy na rys. 4.5), przy czym suma momentów od sił \vec{F}_{BI} i \vec{F}'_{BII} względem osi z musi równać się zeru

$$\sum M_{ID} = F_{BI}l_1 - F'_{BII}(l_1 + l_2) = 0, \quad (4.10)$$

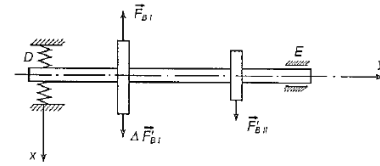
gdzie

$$\Delta F'_{BII} = \Delta m'_{II} R_{II} \omega^2.$$

Jeżeli zablokujemy teraz łożysko E , a odblokujemy łożysko D (rys. 4.6) i dodamy odpowiednie ciało korekcyjne o masie $\Delta m'_I$ (dobrej analogicznie jak $\Delta m'_{II}$) w płaszczyźnie krążka I, to sprowadzimy amplitudy drgań łożyska D w przybliżeniu do zera. Kierunek wektora siły bezwładności $\Delta\vec{F}'_{BI}$ pokrywa się z kierunkiem wektora siły \vec{F}_{BI} , a ich zwroty są przeciwne. Spełniony musi być przy tym warunek równowagi momentów względem łożyska E

$$\sum M_{IE} = F'_{BI}l_3 - (F_{BI} - \Delta F'_{BI})(l_2 + l_3) = 0, \quad (4.11)$$

gdzie $\Delta F'_{BI} = \Delta m'_I R_I \omega^2$ jest siłą bezwładności powstałą w wyniku dodania ciała korekcyjnego o masie $\Delta m'_I$ w płaszczyźnie krążka I.



Rys. 4.6. Schemat układu do wyznaczania masy $\Delta m'_I$ oraz położenia ciała korekcyjnego na kole I

Z równań (4.10) i (4.11) możemy znaleźć związek między siłami \vec{F}_{BI} i $\Delta\vec{F}'_{BI}$

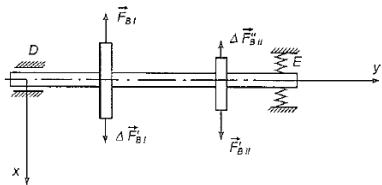
$$F_{BI} = \frac{(l_1 + l_2)(l_2 + l_3)}{l l_2} \Delta F'_{BI}. \quad (4.12)$$

W wyniku tych dwóch operacji zmniejszyliśmy znacznie wielkości sił bezwładności działających na układ, nie sprowadziliśmy ich jednak do zera. Wracając bowiem do schematu przedstawionego na rys. 4.5 stwierdzamy, że na skutek dodania na tarczy I ciała o masie $\Delta m'_I$, nie jest spełniony warunek równowagi momentów względem łożyska D , a zatem łożysko E ponownie będzie wykonywać drgania przy wirowaniu układu. Aby sprowadzić amplitudę drgań łożyska E do zera, musimy ponownie przeprowadzić korekcję w płaszczyźnie koła II, dodając masę $\Delta m''_{II}$ na promieniu R_{II} . Pojawi się wówczas dodatkowa siła

$$\Delta F''_{BII} = \Delta m''_{II} R_{II} \omega^2,$$

przy czym masa $\Delta m''_{II}$ musi być tak dobrana, aby spełniony był warunek równowagi momentów względem łożyska D (rys. 4.7)

$$\sum M_{ID} = (F_{BI} - \Delta F'_{BI})l_1 - (F_{BII} - \Delta F'_{BII})(l_1 + l_2) = 0. \quad (4.13)$$



Rys. 4.7. Schemat układu do wyznaczania masy $\Delta m''_{II}$ ciała korekcyjnego na kole II

Nietrudno zauważyć, że

$$\Delta m''_{II} = \Delta m'_I \frac{l_1}{l_1 + l_2},$$

$$\Delta m''_I = \Delta m''_{II} \frac{l_2}{l_2 + l_3} \text{ itd.},$$

czyli każde następne ciało korekcyjne będzie, proporcjonalnie do odpowiedniego stosunku ramion, mniejsze od poprzedniego i każde kolejne przybliżenie będzie bliższe idealnemu wyrównoważeniu. W praktyce już drugie przybliżenie daje wystarczająco dobry wynik.

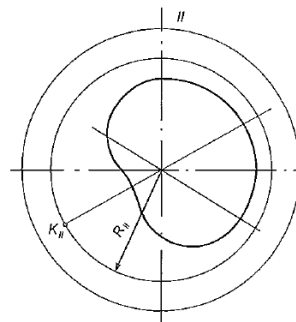
4.5. Przebieg ćwiczenia

4.5.1. Wyznaczenie rezonansowej prędkości obrotowej układu

1. Przy odblokowanych sprężynach łożysk D i E doprowadzić prędkość obrotową układu do około 700 obr/min.
2. Odłączyć napęd i obserwować wskazania czujnika,
3. Przy maksymalnych amplitudach drgań pomierzyć wielkość rezonansowej prędkości obrotowej układu.

4.5.2. Wyznaczenie kierunku korekcyi na kole II oraz masy korekcyjnej $\Delta m'_{II}$

1. Zablokować sprężynę łożyska D i odblokować łożysko E (jak na rys. 4.5).
2. Umieścić próbne ciało korekcyjne (kawałek plasteliny) na kole II w dowolnie wybranym miejscu na promieniu R_{II} .
3. Zanotować największą amplitudę drgań (przy rezonansowej prędkości obrotowej).
4. Po zatrzymaniu układu przyłożyć tę samą plastelinę w następnym miejscu (oznaczonym innym numerem) i powtórzyć poprzednie operacje.
5. Po dokonaniu pomiarów w kilku punktach na obwodzie koła II wykonać biegunowy wykres amplitud jak na rys. 4.8. Punkt K_{II} leżący na osi symetrii otrzymanej krzywej (zbliżonej do kardioidy) wyznacza właściwe miejsce przyłożenia ciała korekcyjnego. Pozostaje jeszcze dobrać metodą kolejnych prób odpowiednią masę korekcyjną, czyli $\Delta m'_{II}$.



Rys. 4.8. Biegunowy wykres amplitud drgań rezonansowych

4.5.3. Wyznaczenie kierunku korekcyi na kole I oraz masy korekcyjnej $\Delta m'_I$

1. Pozostawiając poprzednio dobrane ciało korekcyjne o masie $\Delta m'_{II}$ w punkcie K_{II} , zablokować łożysko E i odblokować łożysko D (jak na rys. 4.6).
2. Przeprowadzić dla koła I analogiczne operacje jak podane w punkcie 4.5.2 dla koła II.
3. Dobrane w ten sposób ciało korekcyjne umieścić w odpowiednim punkcie K_I na kole I.

4.5.4. Wyznaczenie masy korekcyjnej $\Delta m''_{II}$ (drugie przybliżenie)

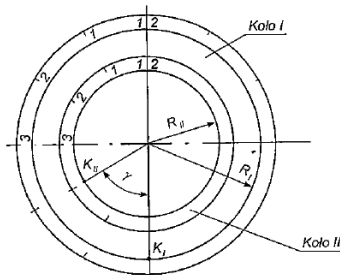
1. Powrócić do schematu podparcia łożysk jak w punkcie 4.5.2 (łożysko E odblokowane).
2. Umieszczając na kole II dodatkową plastelinę po przeciwnej stronie (względem osi wału) niż ciało o masie $\Delta m'_I$ na kole I, dobrać taką jej wielkość, aby ponownie sprawdzić amplitudy drgań do zera; jest to szukana wartość masy $\Delta m''_{II}$.

4.5.5. Pomiar mas dobranych ciał korekcyjnych oraz wymiarów układu potrzebnych do obliczeń

1. Zważyć masy korekcyjne $\Delta m'_I$, $\Delta m''_{II}$ koła II oraz masę $\Delta m'_I$ koła I.
2. Zmierzyć długości l_1, l_2, l_3, l układu (oznaczenia podano na rys. 4.3).

4.5.6. Wyznaczenie kąta γ między kierunkami korekcji

1. Nałożyć na siebie oba wykresy biegunowe (przyjęcie układu odniesienia ułatwiają działki jednakowo napięte na obu krążkach i oznaczone od 1 do 12 jak na rys. 4.9).
2. Pomierzyć wielkość kąta γ między kierunkami korekcji, tj. między kierunkami sił $\Delta \vec{F}'_{BI}$ i $\Delta \vec{F}'_{BII}$.



Rys. 4.9. Wyznaczenie kąta γ między kierunkami korekcji

4.5.7. Obliczenie sił bezwładności \vec{F}'_{BI} i \vec{F}'_{BII}

Przykładane w procesie wyważania ciała korekcyjne wywołują siły bezwładności zależne od ω^2 . W celu jednoznacznego określenia tych sił powinniśmy za każdym razem podawać wartość prędkości kątowej, której one

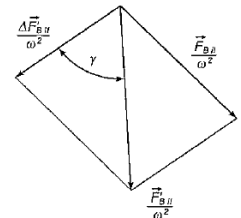
odpowiadają. Dla uniknięcia tej niedogodności będziemy operować wartościami „jednostkowymi” sił odpowiadającymi momentom statycznym

$$\frac{\Delta F'_{BI}}{\omega^2} = \Delta m'_I R_I, \quad \frac{\Delta F'_{BII}}{\omega^2} = \Delta m''_{II} R_{II} \quad \text{itd.}$$

Podobnie w przypadku sił bezwładności \vec{F}_{BI} i \vec{F}_{BII} będziemy operować ich wartościami „jednostkowymi”.

Siłę \vec{F}_{BI} możemy wyznaczyć na podstawie wzoru (4.12), siłę \vec{F}'_{BII} – ze wzoru (4.10), natomiast siłę \vec{F}_{BII} – z planu sił przedstawionego na rys. (4.10), zaś wartość kąta γ – wg punktu 4.5.6.

Mając obliczone wartości sił \vec{F}'_{BI} i \vec{F}'_{BII} odniesione do ω^2 oraz kierunki ich działania, możemy wyznaczyć siły bezwładności na kole I i II dla dowolnej wartości prędkości kątowej wału. Z warunków równowagi (4.7) możemy z kolei wyznaczyć reakcje dynamiczne wywołane przez te siły bezwładności.



Rys. 4.10. Plan sił, z którego wyznacza się siłę bezwładności F_{BII}

4.6. Treść sprawozdania

Sprawozdanie powinno zawierać:

1. Protokół z wynikami pomiarów oraz wyniki obliczeń według punktu 4.5.7, zamieszczone w tabelcy 4.1.
2. Schemat stanowiska i uwagi dotyczące wykonywanego ćwiczenia.
3. Wnioski.

Tabela 4.1

Zestawienie wyników wielkości mierzonych i obliczanych

Wielkości mierzone	Wielkości obliczane
$\Delta m'_I = \dots\dots\dots$	$\Delta m'_I R_I = \dots\dots\dots$
$\Delta m''_{II} = \dots\dots\dots$	$\Delta m''_{II} R_{II} = \dots\dots\dots$
$\Delta m''_{II} = \dots\dots\dots$	$\Delta m''_{II} R_{II} = \dots\dots\dots$
$R_I = \dots\dots\dots$	$F_{BI} = \dots\dots\dots$
$R_{II} = \dots\dots\dots$	$\omega^2 = \dots\dots\dots$
$l_1 = \dots\dots\dots$	$\frac{F'_{BII}}{\omega^2} = \dots\dots\dots$
$l_2 = \dots\dots\dots$	$\frac{F_{BII}}{\omega^2} = \dots\dots\dots$
$l_3 = \dots\dots\dots$	$\frac{F_{BII}}{\omega^2} = \dots\dots\dots$
$l = \dots\dots\dots$	$\frac{F_{BII}}{\omega^2} = \dots\dots\dots$
$\gamma = \dots\dots\dots$	$\gamma = \dots\dots\dots$

LITERATURA

- [1] *Osiński Z.*: Teoria maszyn i podstawy automatyki. WPW, Warszawa 1974.
- [2] *Oderfeld J.*: Wstęp do mechanicznej teorii maszyn. WNT, Warszawa 1962.
- [3] *Kołacin T.*: Podstawy teorii maszyn i automatyki. WPW, Warszawa 1995.