

## Ćwiczenie 7

### WYZNACZANIE CZĘSTOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH PRĘTA

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie częstości drgań własnych pręta utwierdzonego w jednym końcu. Ich wartości są wyznaczone poprzez pomiar częstości odpowiadających zaobserwowanym postaciom drgań pręta przy wymuszeniu kinematycznym.

#### 7.1. Wprowadzenie teoretyczne

Rozpatrywany układ drgający jest układem o ciągłym rozkładzie masy. Drgania swobodne poprzeczne takiego układu opisano równaniem

$$\frac{\sigma^2 y}{\sigma y^2} = -a^4 \frac{\sigma^4 y}{\sigma x^4}, \quad (7.1)$$

gdzie:

- $y(x, t)$  – przemieszczenie liniowe dowolnego elementu pręta w kierunku poprzecznym do osi geometrycznej,
- $a$  – stały współczynnik zależny od wymiarów i własności materiałowych pręta

$$a^4 = \frac{l}{m} EJ,$$

gdzie:

- $l$  – długość belki,
- $m$  – masa belki,
- $EJ$  – sztywność giętna belki.

Jest to równanie różniczkowe cząstkowe czwartego rzędu ze względu na zmienną  $x$  i drugiego ze względu na zmienną  $t$ . Konstrukcja tego równania jest oparta na elementarnej teorii zginania, opisującej związki między siłami i odkształceniami (przy założeniu liniowej sprężystości), oraz na zasadzie d'Alemberta.

Rozwiązania równania ruchu (7.1) poszukujemy w postaci iloczynu funkcji przemieszczeń i funkcji czasu

$$y(x, t) = U(x) T(t). \quad (7.2)$$

Po obliczeniu odpowiednich pochodnych względem zmiennych  $x$  i  $t$  i wstawieniu ich do równania (7.1) otrzymujemy

$$U \ddot{T} = -a^4 U^{IV} T. \quad (7.3)$$

Łatwo zauważyć, że w tym równaniu możemy dokonać rozdzielenia zmiennych. Dokonując tego otrzymujemy

$$\frac{U^{IV}}{U} = -\frac{1}{a^4} \frac{\ddot{T}}{T}. \quad (7.4)$$

Powyższa zależność może być spełniona jedynie wtedy, gdy każda ze stron będzie równa pewnej stałej. Dla ułatwienia dalszych rozważań wygodnie jest ją oznaczyć przez  $\kappa^4$ . W ten sposób równanie (7.4) zostanie zastąpione dwoma niezależnymi równaniami różniczkowymi zwyczajnymi

$$U^{IV} = \kappa^4 U \quad (7.5)$$

oraz

$$T = -\omega^2 \ddot{T}, \quad (7.6)$$

gdzie:

$$\omega = \kappa^2 a^2.$$

Równanie charakterystyczne równania różniczkowego (7.5) ma cztery pierwiastki

$$r_1 = \kappa, \quad r_2 = -\kappa, \quad r_3 = \kappa i, \quad r_4 = -\kappa i. \quad (7.7)$$

Zatem, całkę ogólną równania różniczkowego (7.5) stanowi następująca funkcja

$$U(x) = A \sinh \kappa x + B \cosh \kappa x + C \sin \kappa x + D \cos \kappa x \quad (7.8)$$

Natomiast, równanie (7.6) jest równaniem różniczkowym tylko drugiego rzędu i jego całka ogólna jest następująca

$$T(t) = M \sin \omega t + N \cos \omega t. \quad (7.9)$$

Wobec tego rozwiązanie ogólne równania (7.1) jest następujące

$$y(x, t) = (A \sinh \kappa x + B \cosh \kappa x + C \sin \kappa x + D \cos \kappa x) \times (M \sin \omega t + N \cos \omega t). \quad (7.10)$$

W powyższej funkcji występuje sześć stałych całkowania  $-A, B, C, D$  oraz  $M$  i  $N$ . W celu ich wyznaczenia trzeba zatem sformułować sześć warunków granicznych. Stałe  $A, B, C, D$  wyznaczamy z warunków brzegowych, jakie powinno spełniać rozwiązanie. Wynikają one ze sposobu zamocowania drgającej belki. Liczba warunków brzegowych jest równa rzędowi równania

różniczkowego ze względu na zmienną  $x$ . W tym wypadku występują cztery warunki brzegowe, po dwa dla każdego końca belki. Możemy je zapisać następująco:

$$\left. \begin{aligned} y(0,t) &= 0, \\ \frac{\sigma y(0,t)}{\sigma x} &= 0, \\ \frac{\sigma^2 y(l,t)}{\sigma x^2} &= 0, \\ \frac{\sigma^3 y(l,t)}{\sigma x^3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

Dwa pierwsze warunki dotyczą utwierdzenia belki i oznaczają odpowiednio brak ugięcia i brak obrotu przekroju, zaś dwa następne odnoszą się do swobodnego końca i oznaczają, że moment gnący i siła poprzeczna równają się zeru. Zachodzi zatem potrzeba obliczenia pochodnych funkcji  $y(x,t)$  względem zmiennej  $x$ . Poniżej zapisano wyrażenia przedstawiające te pochodne

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma y}{\sigma x} &= (A\kappa \cosh \kappa x + B\kappa \sinh \kappa x + C\kappa \cos \kappa x - D\kappa \sin \kappa x) T(t), \\ \frac{\sigma^2 y}{\sigma x^2} &= (A\kappa^2 \sinh \kappa x + B\kappa^2 \cosh \kappa x - C\kappa^2 \sin \kappa x - D\kappa^2 \cos \kappa x) T(t), \\ \frac{\sigma^3 y}{\sigma x^3} &= (A\kappa^3 \cosh \kappa x + B\kappa^3 \sinh \kappa x - C\kappa^3 \cos \kappa x + D\kappa^3 \sin \kappa x) T(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

Warunki (7.11) muszą być spełnione dla każdego  $t$ . Oznacza to, że muszą być spełnione również dla  $T(t) = 0$ , a ponieważ z założenia  $\kappa = 0$  to ostatecznie, po uwzględnieniu pochodnych (7.12), możemy je zapisać w postaci układu czterech równań

$$\left. \begin{aligned} (A \sinh \kappa x + B \cosh \kappa x + C \sin \kappa x + D \cos \kappa x)_{\text{dla } x=0} &= 0, \\ (A \cosh \kappa x + B \sinh \kappa x + C \cos \kappa x - D \sin \kappa x)_{\text{dla } x=0} &= 0, \\ (A \sinh \kappa x + B \cosh \kappa x - C \sin \kappa x - D \cos \kappa x)_{\text{dla } x=l} &= 0, \\ (A \cosh \kappa x + B \sinh \kappa x - C \cos \kappa x + D \sin \kappa x)_{\text{dla } x=l} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

Dwa pierwsze warunki dają związki między stałymi w postaci

$$A = -C \text{ oraz } B = -D.$$

Uwzględnienie tych związków w pozostałych dwóch równaniach prowadzi, po dokonaniu odpowiednich przekształceń, do jednorodnego układu dwóch równań ze względu na stałe  $A$  i  $B$

$$\left. \begin{aligned} A (\sinh \kappa l + \sin \kappa l) + B (\cosh \kappa l + \cos \kappa l) &= 0, \\ A (\cosh \kappa l + \cos \kappa l) + B (\sinh \kappa l - \sin \kappa l) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

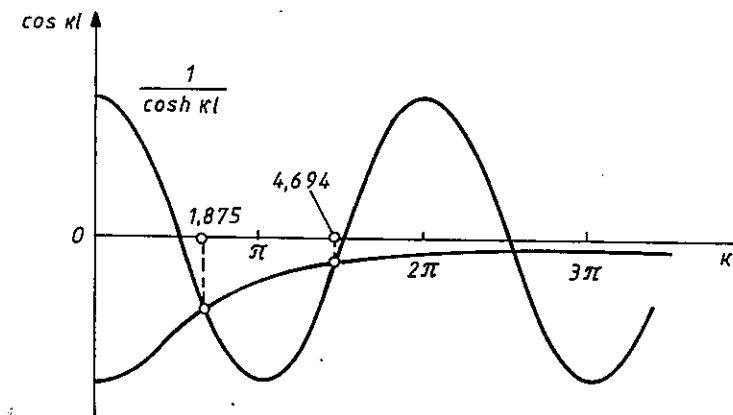
Warunkiem istnienia niezerowych rozwiązań tego układu – zapewniającym nietrywialne rozwiązanie zagadnienia – jest zerowanie się wyznacznika charakterystycznego utworzonego ze współczynników przy niewiadomych  $A$  i  $B$ . A więc

$$\begin{vmatrix} \sinh \kappa l + \sin \kappa l & \cosh \kappa l + \cos \kappa l \\ \cosh \kappa l + \cos \kappa l & \sinh \kappa l - \sin \kappa l \end{vmatrix} = 0. \quad (7.15)$$

Po rozwinięciu wyznacznika, wymnożeniu wyrażeń oraz dokonaniu odpowiednich przekształceń i redukcji, z przyrównania tego wyznacznika do zera powstaje równanie charakterystyczne

$$1 + \cos \kappa l \cosh \kappa l = 0. \quad (7.16)$$

Jest to równanie przestępne. Na rys. 7.1 przedstawiono jego graficzne rozwiązanie.



Rys. 7.1. Rozwiązanie graficzne równania przestępnego (7.13)

Pierwsze cztery pierwiastki tego równania są następujące

$$\left. \begin{aligned} (\kappa l)_1 &= 1,875, \\ (\kappa l)_2 &= 4,694, \\ (\kappa l)_3 &= 7,855, \\ (\kappa l)_4 &= 10,996. \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

Przybliżone wartości następnych pierwiastków możemy określić z wystarczająco dobrym przybliżeniem (już dla  $n = 3$ ) z wyrażenia (7.18) będącego granicą, do której dąży ciąg rozwiązań  $(\kappa l)_n$

$$(\kappa l)_n = \frac{2n-1}{2} \pi. \quad (7.18)$$

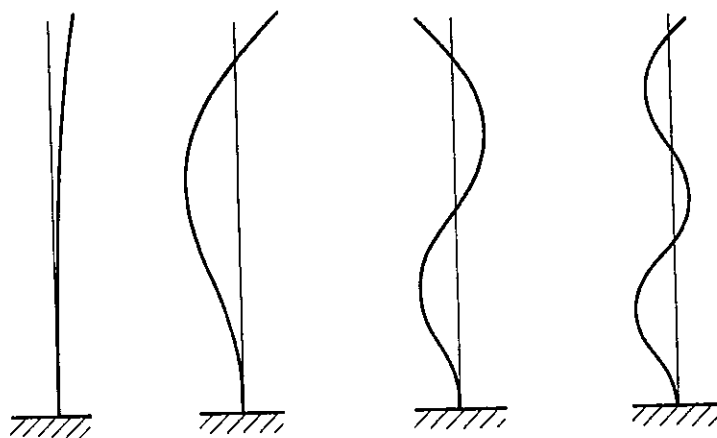
Wyznaczenie stałej  $\kappa$  kończy rozważania. Występuje bowiem związek pomiędzy stałą  $\kappa$  i częstotliwością drgań własnych  $\omega$ . Mianowicie

$$\omega = \kappa^2 a^2 \quad (7.19)$$

i dalej

$$\omega = \kappa^2 \sqrt{\frac{l}{m} EJ}. \quad (7.20)$$

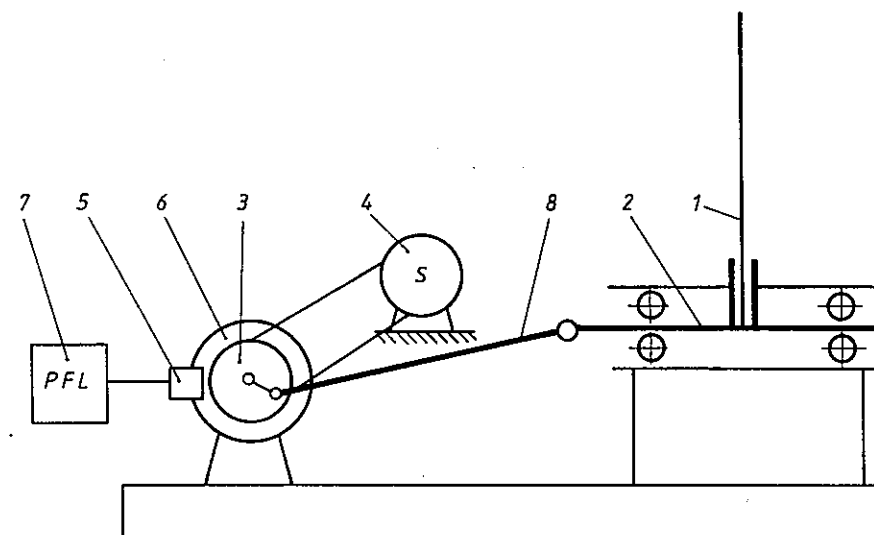
Na rys. 7.2 przedstawiono kształty linii ugięcia pręta (postaci własnej drgań) odpowiadające kolejnym częstotliwościom własnym.



Rys. 7.2. Postacie drgań własnych pręta

## 7.2. Opis stanowiska

Schemat stanowiska, na którym jest wykonywane ćwiczenie, podano na rys. 7.3. Składa się ono z badanego pręta 1, przymocowanego do ruchomego wózka 2. Wózek ten jest ułożyskowany w prowadnicach przytwierdzonych do podstawy stanowiska. Do napędu wózka służy układ korbowo-wodzikowy składający się z korbowodu 8 i nastawnego mimośrodowo 3. Wał, na którym jest osadzony czop mimośrodowy jest napędzany silnikiem 4. Na wale tym jest również zamontowana tarcza 6 z naciętymi szczelinami, służąca do pomiaru prędkości obrotowej. Pomiaru dokonuje się za pomocą fotoelektronicznego czujnika 5 i miernika 7. Ponadto, stanowisko jest wyposażone w tyrystorowy układ sterowania silnikiem elektrycznym, który zapewnia możliwość ciągłej regulacji prędkości obrotowej silnika.



Rys. 7.3. Schemat stanowiska badawczego

## 7.3. Przebieg ćwiczenia

1. Przeznaczony do badań pręt zamocować w uchwycie wózka.
2. Ustawić wybraną wielkość mimośrodowo układu napędowego.
3. Pokrętło regulacji prędkości obrotowej ustawić w lewym skrajnym położeniu.
4. Włączyć zasilanie układu sterowania i pokrętłem regulacji zwiększać prędkość obrotową silnika aż do zaobserwowania pierwszego rezonansu drgań układu.
5. Dokonać pomiaru prędkości obrotowej oraz naszkicować kształt linii ugięcia.
6. Zwiększając prędkość obrotową, powtórzyć czynności pomiarowe dla następnych zaobserwowanych rezonansów drgań.

## 7.4. Treść sprawozdania

Sprawozdanie powinno zawierać:

- 1) schemat i krótki opis stanowiska,
- 2) szkice kształtu linii ugięcia – postaci drgań pręta w rezonansach oraz odpowiadające tym rezonansom zmierzone wartości prędkości obrotowej,

- 3) obliczenia wartości częstości własnych drgań pręta na podstawie zależności teoretycznych,
- 4) porównanie wyników uzyskanych teoretycznie i doświadczalnie,
- 5) wnioski.

## LITERATURA

- [1] Piszczyk K., Walczak J.: Drgania w budowie maszyn. Warszawa, PWN, 1972.
- [2] Scanlan R., Rosenbaum R.: Drgania i flatter samolotów. Warszawa, PWN, 1964.
- [3] Ziemia S.: Analiza drgań, t.2. Warszawa, PWN, 1959.