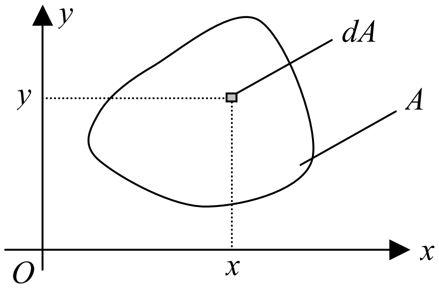
Momenty bezwładności figur płaskich - definicje i wzory

Dana jest figura płaska o polu A oraz prostokątny układ współrzędnych Oxy.



Momentem bezwładności figury względem osi x jest

$$I_x = \int_A y^2 dA .$$

Momentem bezwładności figury względem osi y jest

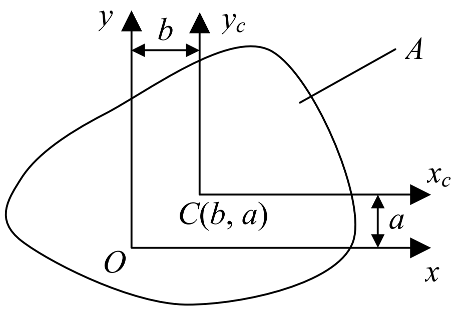
$$I_y = \int_A x^2 dA .$$

Momentem dewiacyjnym figury względem prostokątnego układu osi x i y jest

$$I_{xy} = \int_A xy dA .$$

Z definicji momentów bezwładności wynika, że mogą być one tylko dodatnie. Natomiast moment dewiacyjny może być dodatni, ujemny lub równy zero.

W przypadku równoległego przesunięcia osi układu korzystamy z twierdzenia Steinera, wyrażonego poniższymi wzorami:



$$I_x = I_{x_c} + A \cdot a^2$$

$$I_y = I_{y_c} + A \cdot b^2$$

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + A \cdot a \cdot b$$

gdzie osie x_c i y_c są osiami centralnymi, natomiast b i a są współrzędnymi punktu C w układzie Oxy. Z rysunku wynika, że są to odległości między osiami.

Osiowe momenty bezwładności oraz dewiacyjny moment figury względem osi centralnych można wyznaczyć korzystając z przekształconych wzorów Steinera:

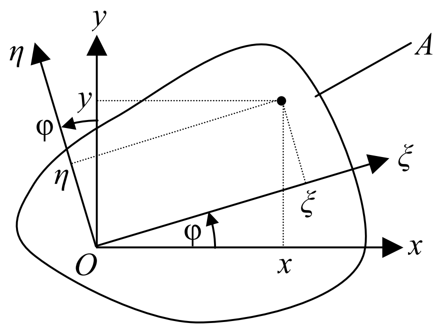
$$I_{x_c} = I_x - A \cdot a^2$$

$$I_{y_c} = I_y - A \cdot b^2$$

$$I_{x_c y_c} = I_{xy} - A \cdot a \cdot b .$$

Przyjmijmy prostokątny układ współrzędnych $O\xi\eta$ obrócony o kąt φ względem układu Oxy. Współrzędne dowolnego punktu figury płaskiej spełniają zależności:

$$\xi = x\cos\varphi + y\sin\varphi$$
$$\eta = y\cos\varphi - x\sin\varphi.$$



Wykorzystując te zależności wyznaczamy momenty bezwładności i moment dewiacyjny w obróconym układzie $O\xi\eta$:

$$I_\xi = \int_A \eta^2 dA = I_x\cos^2\varphi + I_y\sin^2\varphi - 2I_{xy}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$I_\eta = \int_A \xi^2 dA = I_y\cos^2\varphi + I_x\sin^2\varphi + 2I_{xy}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$I_{\xi\eta} = \int_A \xi\eta dA = \left(I_x - I_y\right)\sin\varphi\cos\varphi + I_{xy}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)$$

lub

$$I_\xi = \frac{\left(I_x + I_y\right)}{2} + \frac{\left(I_x - I_y\right)}{2}\cos 2\varphi - I_{xy}\sin 2\varphi$$

$$I_\eta = \frac{\left(I_x + I_y\right)}{2} - \frac{\left(I_x - I_y\right)}{2}\cos 2\varphi + I_{xy}\sin 2\varphi$$

$$I_{\xi\eta} = \frac{\left(I_x - I_y\right)}{2}\sin 2\varphi + I_{xy}\cos 2\varphi.$$

Osie układu prostokątnego, w którym moment dewiacyjny $I_{\xi\eta} = 0$ nazywamy głównymi osiami bezwładności. Kąt φ_o między osiami prostokątnego układu Oxy i układu głównych osi bezwładności spełnia równanie:

$$tg\, 2\varphi_o = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

Momenty bezwładności względem głównych osi bezwładności osiągają wartości ekstremalne:

$$I_1 = I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}{}^2}$$

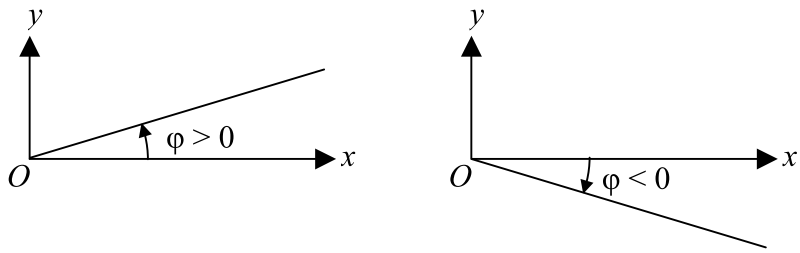
$$I_2 = I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}{}^2}.$$

Z powyższych wzorów wynika, że $I_x + I_y = I_\xi + I_\eta = I_1 + I_2$

Główna oś bezwładności, względem której moment bezwładności ma wartość $I_1 = I_{max}$ tworzy z osią x kąt φ_1, natomiast główna oś bezwładności, względem której moment bezwładności ma wartość $I_2 = I_{min}$ tworzy z osią x kąt φ_2. Kierunki główne minimalnego i maksymalnego momentów bezwładności wyznaczamy następująco:

1. $I_x > I_y$ to $\varphi_1 = \varphi_o$, natomiast $\varphi_2 = \varphi_o + \frac{\pi}{2}$
2. $I_x < I_y$ to $\varphi_1 = \varphi_o + \frac{\pi}{2}$, natomiast $\varphi_2 = \varphi_o$
3. $I_x = I_y$, $I_{xy} > 0$ to $\varphi_1 = -\frac{\pi}{4}$, natomiast $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$
4. $I_x = I_y$, $I_{xy} < 0$ to $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, natomiast $\varphi_2 = -\frac{\pi}{4}$.

Znak dodatni bądź ujemny kąta φ ilustruje poniższy rysunek.

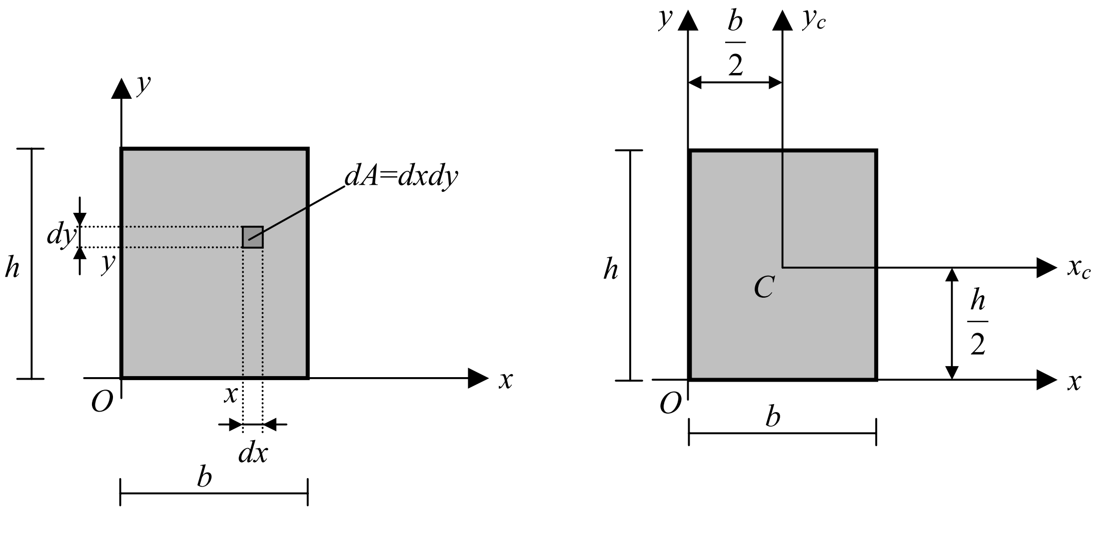


O głównych centralnych osiach bezwładności mówimy wówczas, gdy układ osi głównych ma początek w środku ciężkości rozpatrywanej figury płaskiej. Momenty bezwładności względem tych osi nazywamy głównymi centralnymi momentami bezwładności.

Jeżeli jedna z osi układu współrzędnych jest osią symetrii figury płaskiej, to moment dewiacyjny figury w takim układzie współrzędnych jest równy zero.

W przypadku wyznaczania momentów bezwładności i momentu dewiacyjnego figury złożonej będziemy stosować metodę superpozycji, traktując rozpatrywaną figurę jako sumę figur elementarnych, takich jak np. prostokąt, trójkąt i fragment koła. Korzystać będziemy z wartości momentów bezwładności i momentu dewiacyjnego dla wymienionych figur.

1. Prostokąt



$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^b \int_0^h y^2 dxdy = \frac{1}{3}bh^3$$

$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_0^b \int_0^h x^2 dxdy = \frac{1}{3} hb^3$$

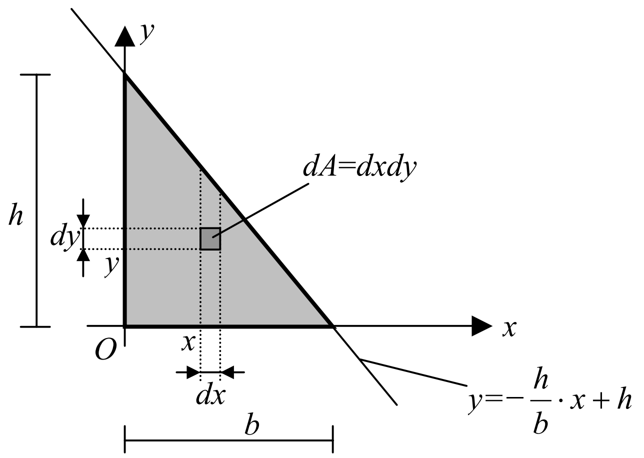
$$I_{xy} = \int_A xydA = \int_0^b \int_0^h xydxdy = \frac{1}{4} b^2 h^2$$

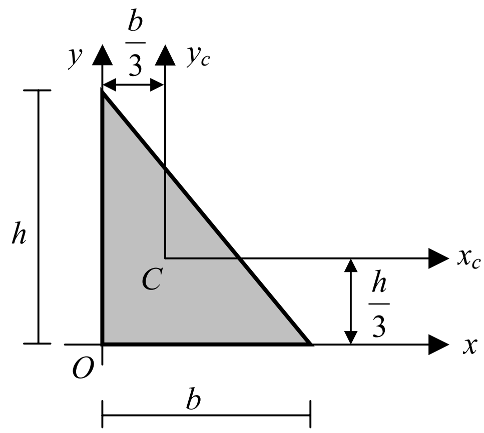
$$I_{x_c} = I_x - A \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} bh^3 - bh \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} bh^3$$

$$I_{y_c} = I_y - A \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} hb^3 - bh \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} hb^3$$

$$I_{x_c y_c} = I_{xy} - A \cdot \left(\frac{b}{2}\right) \cdot \left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{4} b^2 h^2 - bh \cdot \left(\frac{b}{2}\right) \cdot \left(\frac{h}{2}\right) = 0$$

2. Trójkąt





$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^b \left[\int_0^{h\left(1-\frac{x}{b}\right)} y^2 dy \right] dx = \frac{1}{12} bh^3$$

$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_0^b \left[\int_0^{h\left(1-\frac{x}{b}\right)} x^2 dy \right] dx = \frac{1}{12} hb^3$$

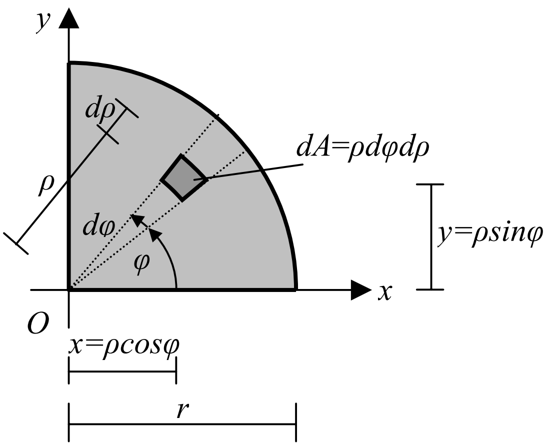
$$I_{xy} = \int_A xydA = \int_0^b \left[\int_0^{h\left(1-\frac{x}{b}\right)} xydy \right] dx = \frac{1}{24} h^2 b^2$$

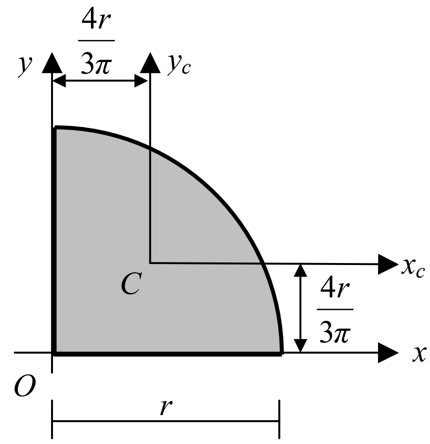
$$I_{x_c} = I_x - A \cdot \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{1}{12} bh^3 - \frac{1}{2} bh \cdot \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{1}{36} bh^3$$

$$I_{y_c} = I_y - A \cdot \left(\frac{b}{3}\right)^2 = \frac{1}{12} hb^3 - \frac{1}{2} bh \cdot \left(\frac{b}{3}\right)^2 = \frac{1}{36} hb^3$$

$$I_{x_c y_c} = I_{xy} - A \cdot \left(\frac{b}{3}\right) \cdot \left(\frac{h}{3}\right) = \frac{1}{24} b^2 h^2 - \frac{1}{2} bh \cdot \left(\frac{b}{3}\right) \cdot \left(\frac{h}{3}\right) = -\frac{1}{72} b^2 h^2$$

3. Ćwiartka koła





$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^r \rho^2 sin^2\varphi \rho d\varphi d\rho = \frac{1}{16}\pi r^4$$

$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^r \rho^2 \cos^2\varphi \rho d\varphi d\rho = \frac{1}{16}\pi r^4$$

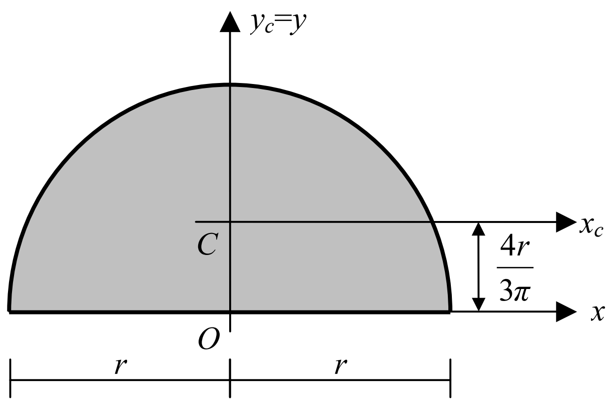
$$I_{xy} = \int_A xydA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^r \rho^2 sin\varphi\cos\varphi \rho d\varphi d\rho = \frac{1}{8} r^4$$

$$I_{x_c} = I_x - A \cdot \left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2 = \frac{1}{16}\pi r^4 - \frac{1}{4}\pi r^2 \cdot \left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2 \cong 0.05488 r^4$$

$$I_{y_c} = I_y - A \cdot \left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2 = \frac{1}{16}\pi r^4 - \frac{1}{4}\pi r^2 \cdot \left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2 \cong 0.05488 r^4$$

$$I_{x_c y_c} = I_{xy} - A \cdot \left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2 = \frac{1}{8} r^4 - \frac{1}{4}\pi r^2 \cdot \left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2 \cong -0.01647 r^4$$

4. Półkole

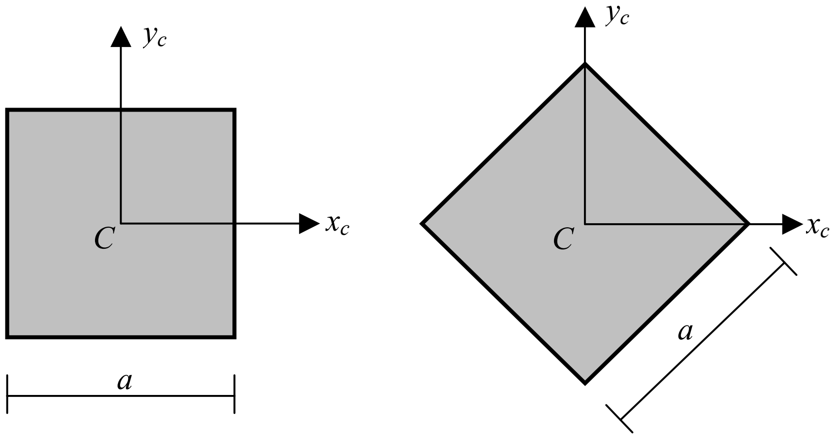


$$I_x = I_y = 2 \cdot \frac{1}{16} \cdot \pi r^4 = \frac{1}{8}\pi r^4$$

$$I_{x_c} = 2 \cdot \left[\frac{1}{16}\pi r^4 - \frac{1}{4}\pi r^2 \cdot \left(\frac{4r}{3\pi} \right)^2 \right] \cong 0.10976 r^4$$

$$I_{x_c y_c} = I_{xy} = 0$$

5. Kwadrat



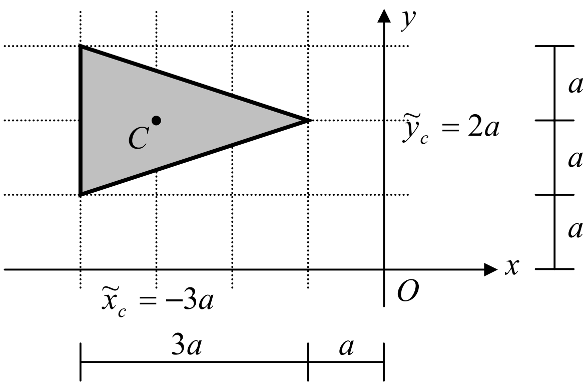
$$I_{x_c} = I_{y_c} = \frac{1}{12} a^4$$

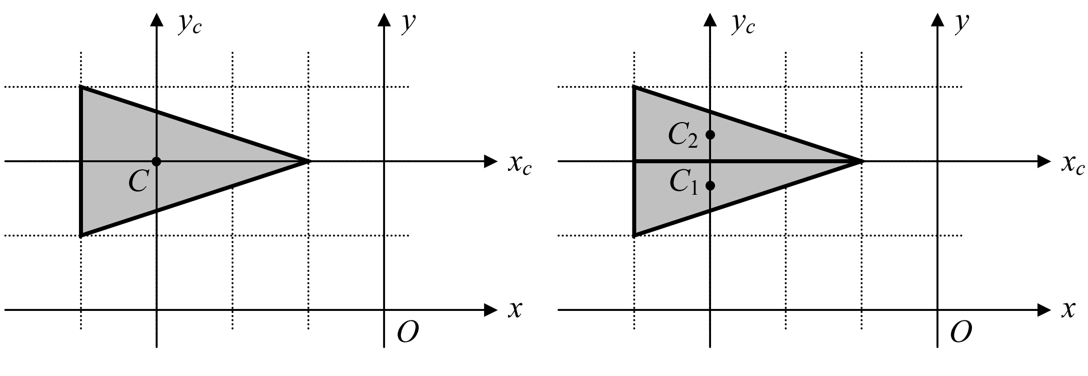
$$I_{x_c y_c} = 0$$

W przypadku kwadratu momenty bezwładności i moment dewiacyjny w dowolnym układzie osi centralnych przyjmują podane powyżej wartości.

Przykład I

Wyznaczyć momenty bezwładności i moment dewiacyjny dla poniższego trójkąta równoramiennego w układzie *Oxy*.





Wprowadzamy układ osi centralnych dla trójkąta. Oś x_c jest osią symetrii figury. Następnie dzielimy trójkąt równoramienny na dwa trójkąty prostokątne.

Moment bezwładności trójkąta równoramiennego względem osi x_c jest sumą momentów bezwładności względem tej osi dwu jednakowych trójkątów prostokątnych, stykających się podstawą z osią x_c.

$$I_{x_c} = 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot 3a \cdot a^3 = \frac{1}{2} a^4$$

Moment bezwładności trójkąta równoramiennego względem osi y_c jest sumą momentów bezwładności względem tej osi dwu jednakowych trójkątów prostokątnych. Na osi y_c leżą środki ciężkości obu trójkątów, a więc

$$I_{y_c} = 2 \cdot \frac{1}{36} a \cdot (3a)^3 = \frac{3}{2} \cdot a^4$$

Moment dewiacyjny trójkąta równoramiennego względem układu osi $x_c y_c$ jest równy zero, gdyż oś x_c jest osią symetrii rozpatrywanej figury.

$$I_{x_c y_c} = 0$$

Aby wyznaczyć momenty bezwładności i moment dewiacyjny dla trójkąta równoramiennego w układzie Oxy należy skorzystać z twierdzenia Steinera. Pole powierzchni trójkąta wynosi

$$A = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 2a = 3a^2 .$$

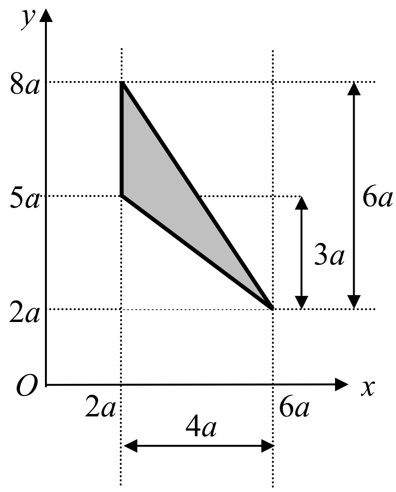
$$I_x = I_{x_c} + A \cdot \widetilde{y}^2 = \frac{1}{2} a^4 + 3a^2 \cdot (2a)^2 = 12.5a^4$$

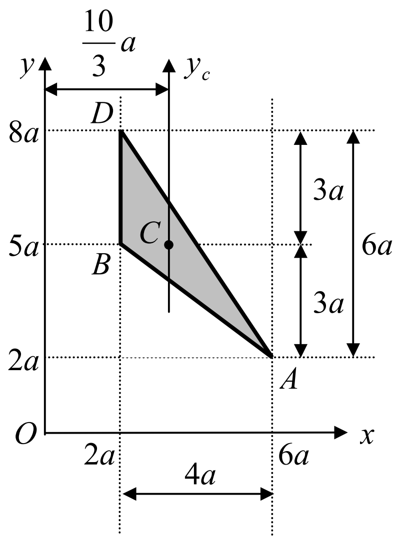
$$I_y = I_{y_c} + A \cdot \widetilde{x}_c^{\,2} = \frac{3}{2} a^4 + 3a^2 \cdot (-3a)^2 = 28.5a^4$$

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + A \cdot \widetilde{x}_c \cdot \widetilde{y}_c = 0 + 3a^2 \cdot (-3a) \cdot 2a = -18a^4$$

Przykład II

Wyznaczyć momenty bezwładności i moment dewiacyjny dla poniższego trójkąta w układzie współrzędnych Oxy.





Rozpatrywaną figurę otrzymamy odejmując figurę II od figury I.

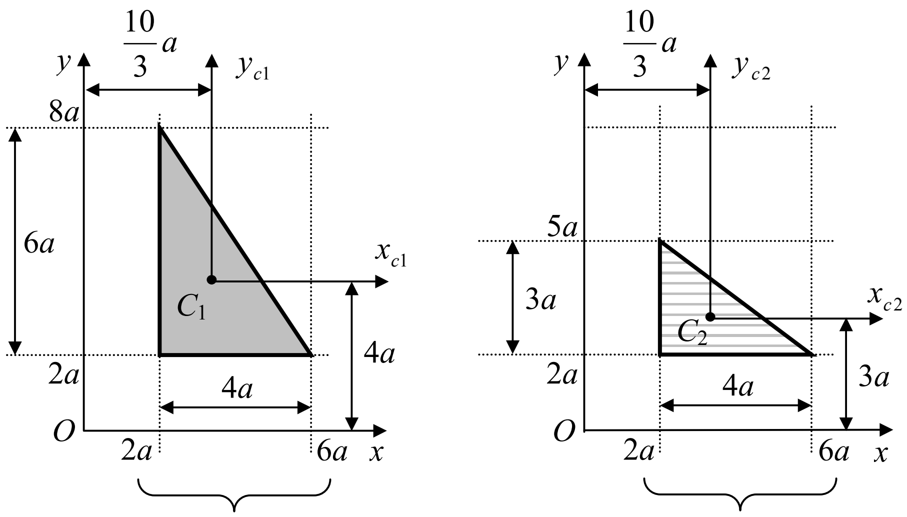


figura I figura II

$$A^{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\cdot 4a\cdot 6a = 12a^2, \qquad \tilde{x}_{c1} = \frac{10}{3}a, \qquad \tilde{y}_{c1} = 4a,$$

$$A^{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\cdot 4a\cdot 3a = 6a^2, \qquad \tilde{x}_{c2} = \frac{10}{3}a, \qquad \tilde{y}_{c2} = 3a.$$

$$A = A^{\mathrm{I}} - A^{\mathrm{II}} = 12a^2 - 6a^2 = 6a^2$$

Moment bezwładności względem osi x wyznaczymy jako różnicę momentu bezwładności względem osi x figury I i figury II.

$$I_x = I_x{}^{\mathrm{I}} - I_x{}^{\mathrm{II}} = I_{x_{c1}}{}^{\mathrm{I}} + A^{\mathrm{I}}\cdot \tilde{y}_{c1}{}^2 - \left(I_{x_{c2}}{}^{\mathrm{II}} + A^{\mathrm{II}}\cdot \tilde{y}_{c2}{}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{36}\cdot 4a\cdot (6a)^3 + 12a^2\cdot (4a)^2 - \left[\frac{1}{36}\cdot 4a\cdot (3a)^2 + 6a^2\cdot (3a)^2\right] = 159a^4$$

W przypadku wyznaczania momentu bezwładności względem osi y nie musimy dzielić figury. Bok BD trójkąta jest równoległy do osi y i do osi y_c. Moment bezwładności względem osi y_c obliczymy korzystając ze wzoru

$$I_{y_c} = \frac{1}{36}\cdot b\cdot h^3 = \frac{1}{36}\cdot 3a\cdot (4a)^3 = \frac{16}{3}a^4$$

Moment bezwładności względem osi y wyznaczymy z wykorzystaniem wzoru Steinera

$$I_y = I_{y_c} + A\cdot \tilde{x}_c{}^2 = \frac{16}{3}a^4 + 6a^2\cdot\left(\frac{10}{3}a\right)^2 = 72\mathrm{a}^4$$

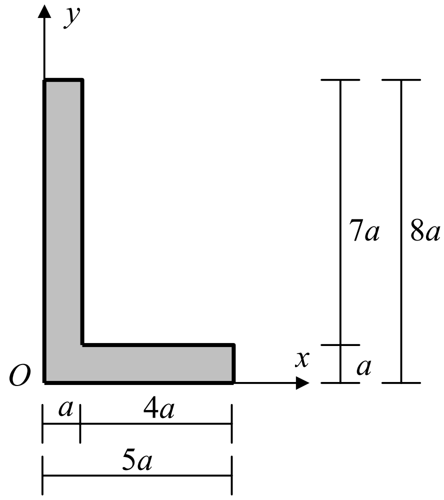
W celu obliczenia momentu dewiacyjnego traktujemy rozpatrywany trójkąt jako różnicę figury I i figury II.

$$I_{xy} = I_{xy}{}^{\mathrm{I}} - I_{xy}{}^{\mathrm{II}} = I_{x_{c1}y_{c1}} + A^{\mathrm{I}}\cdot \tilde{x}_{c1}\cdot \tilde{y}_{c1} - \left(I_{x_{c2}y_{c2}}{}^{\mathrm{II}} + A^{\mathrm{II}}\cdot \tilde{x}_{c2}\cdot \tilde{y}_{c2}\right) =$$

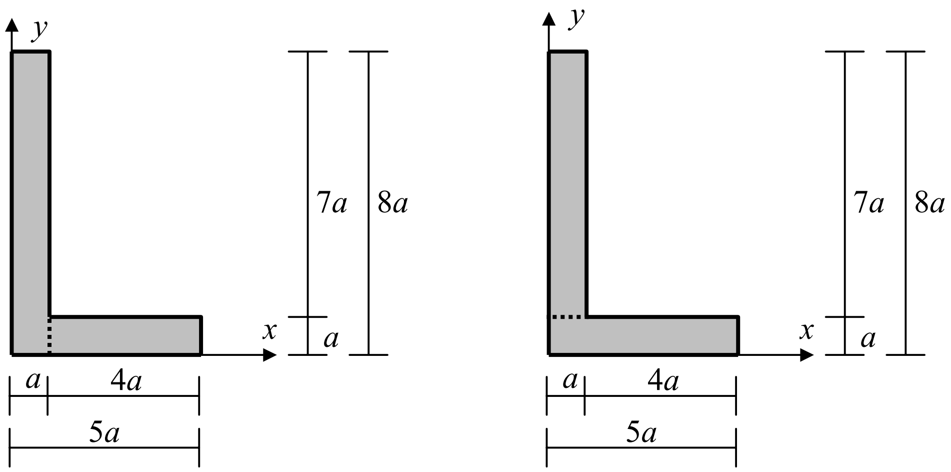
$$= -\frac{1}{72}\cdot (4a)^2\cdot (6a)^2 + 12a^2\cdot \frac{10}{3}a\cdot 4a - \left[-\frac{1}{72}(4a)^2\cdot (3a)^2 + 6a^2\,\frac{10}{3}a\cdot 3a\right] = 94a^4$$

Przykład III

Wyznaczyć momenty bezwładności i moment dewiacyjny dla poniższej figury w układzie współrzędnych Oxy.



Przed wyznaczeniem momentu bezwładności rozpatrywanej figury względem osi x dokonamy jej podziału na dwa prostokąty, tak żeby każdy prostokąt jednym bokiem stykał się z osią x.

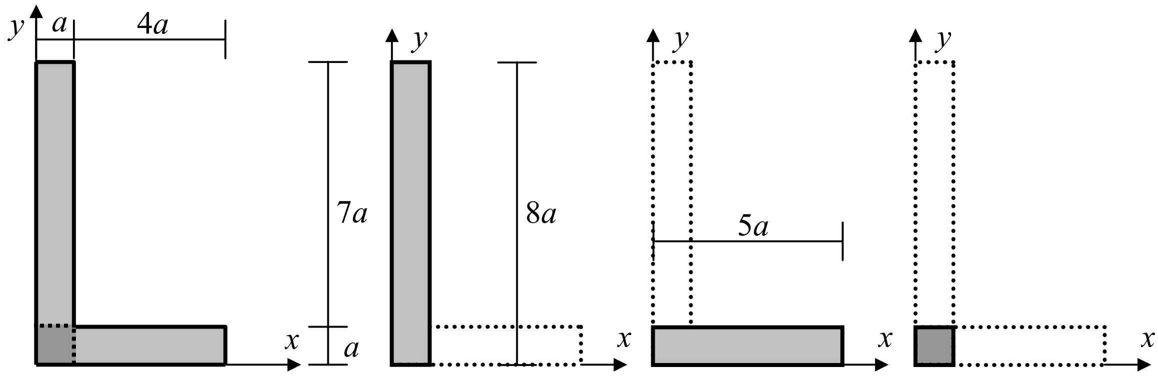


$$I_x = \frac{1}{3} \cdot a \cdot (8a)^3 + \frac{1}{3} \cdot 4a \cdot a^3 = 172a^4$$

W celu obliczenia momentu bezwładności figury względem osi y dokonamy jej podziału na dwa prostokąty, z których każdy jednym bokiem styka się z osią y.

$$I_y = \frac{1}{3} \cdot 7a \cdot a^3 + \frac{1}{3} \cdot a \cdot (5a)^3 = 44a^4$$

Dla wyznaczenia momentu dewiacyjnego zastosujemy jeszcze inny podział.



Do obliczeń przyjmujemy figury składowe, zgodne z powyższym rysunkiem. Dwa prostokąty o wymiarach 8*a* x *a* i *a* x 5*a* mają część wspólną w postaci kwadratu o boku *a*, dla którego moment dewiacyjny będzie uwzględniony dwukrotnie. Należy więc w obliczeniach moment dewiacyjny dla tego kwadratu, traktowanego jako trzecia figura, przyjąć ze znakiem minus.

$$I_{xy} = \frac{1}{4} \cdot (8a)^2 \cdot a^2 + \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot (5a)^2 - \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot a^2 = 22a^4 .$$