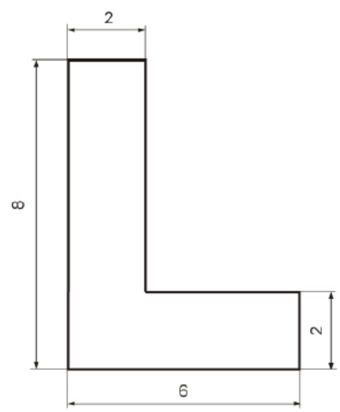
MOMENTY BEZWŁADNOŚCI-FIGURY PŁASKIE

Zadanie 1

Dla figury przedstawionej na rysunku wyznaczyć położenie głównych centralnych osi bezwładności i określić względem nich główne centralne momenty bezwładności. Wymiary kątownika zostały podane w [mm]



Rozwiązanie

Rozpocząć należy od wyznaczenia współrzędnych środka ciężkości dla danej figury, względem przyjętego uprzednio układu odniesienia Oxy. Wykorzystując momenty statyczne i pola powierzchni obliczamy wzpółrzedne środka. Kątownik dzielimy na dwa prostokąty.

$$x_c = 2\text{mm}; \qquad y_c = 3\text{mm}$$

Momenty bezwładności prostokątów na które podzieliliśmy naszą figurę względem ich osi x_1, y_1 i x_2, y_2 mających początki w ich środkach ciężkości wynoszą

$$I_{x1} = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{2 \cdot 6^3}{12} = 36[\text{mm}^4]; \qquad I_{y1} = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{6 \cdot 2^3}{12} = 4[\text{mm}^4]$$

$$I_{x2} = \frac{6 \cdot 2^3}{12} = 4[\text{mm}^4]; \qquad I_{y2} = \frac{2 \cdot 6^3}{12} = 36[\text{mm}^4]$$

Przez środek ciężkości C figury prowadzimy osie układu Cx_cy_c

Wyznaczamy moment bezwładności względem osi x_c figury 1 korzystając z twierdzenia Steinera

$I_{xc}^{(1)} = I_{x1} + A_1 \cdot (y_1 - y_c)^2 = 36 + 12(5-3)^2 = 84[mm^4]$,

następnie figury 2

$I_{xc}^{(2)} = I_{x2} + A_2 \cdot (y_2 - y_c)^2 = 4 + 12(1-3)^2 = 52[mm^4]$

sumujemy te momenty otrzymując moment bezwładności całej figury względem osi x_c:

$I_{xc} = I_{xc}^{(1)} + I_{xc}^{(2)} = 84 + 52 = 136[mm^4]$

Podobnie postępujemy wyznaczając I_{yc}

$I_{yc}^{(1)} = I_{y1} + A_1 \cdot (x_1 - x_c)^2 = 4 + 12(1-2)^2 = 16[mm^4]$

$I_{yc}^{(2)} = I_{y2} + A_2 \cdot (x_2 - x_c)^2 = 36 + 12(3-2)^2 = 48[mm^4]$

$I_{yc} = I_{yc}^{(1)} + I_{yc}^{(2)} = 16 + 48 = 64[mm^4]$

Wyznaczamy moment dewiacji figury 1 względem osi Cx_cy_c

$I_{xcyc}^{(1)} = 0 + A_1(x_1 - x_c)(y_1 - y_c) = 12(1-2)(5-3) = -24[mm^4]$

oraz figury 2

$I_{xcyc}^{(2)} = 0 + A_2(x_2 - x_c)(y_2 - y_c) = 12(1-3)(3-2) = -24[mm^4]$

Całkowity moment dewiacji

$$I_{xcyc} = I_{xcyc}^{(1)} + I_{xcyc}^{(2)} = -24 - 24 = -48[mm^4]$$

Następnie wyznaczamy kąt φ_o jaki należy odmierzyć od osi x_c aby znaleźć położenie osi głównych

$$tg2\varphi_o = -\frac{2 \cdot I_{xcyc}}{I_{xc} - I_{yc}} = \frac{2 \cdot 48}{136 - 64} = 1,33$$

więc

$$2\varphi_o = 53,13^o; \qquad \varphi_o = 26,56^o$$

Aby stwierdzić czy oś I_{max} (1)będzie obrócona względem osi x_c o kąt φ_o, czy $\varphi_o + 90^o$ podstawiamy wyliczone wartości do wzoru transformacyjnego

$$I_\xi = \frac{1}{2}(I_{xc} + I_{yc}) + \frac{1}{2}(I_{xc} - I_{yc}) \cdot \cos 2\varphi_o - I_{xcyc} \cdot \sin 2\varphi_o =$$
$$= \frac{136+64}{2} + \frac{136-64}{2} \cdot \cos 53{,}13^o + 48 \cdot \sin 53{,}13 = 100 + 21{,}6 + 38{,}4 = 160[mm^4]$$

widzimy, że wyliczone $I_\xi > I_{xc}$,

Stwierdzamy zatem, że oś 1 (dla I_{max}), ustala kąt , $\varphi_o = 26{,}56^o$. Oś 2 (dla I_{min}) jest więc nachylona do dodatniego kierunku osi x_c pod kątem $\varphi_o + 90^o$,

Wyliczone I_ξ jest oczywiście równe maksymalnemu, centralnemu momentowi bezwładności figury I_1

Główne centralne momenty bezwładności wyliczamy ze wzorów

$$I_1 = \frac{1}{2}(I_{xc} + I_{yc}) + \frac{1}{2}\sqrt{(I_{xc} - I_{yc})^2 + 4 \cdot I_{xcyc}^2} = \frac{1}{2}(136+64) + \frac{1}{2}\sqrt{(136-64)^2 + 4 \cdot 48^2} = 160[mm^4],$$
$$I_2 = \frac{1}{2}(I_{xc} + I_{yc}) - \frac{1}{2}\sqrt{(I_{xc} - I_{yc})^2 + 4 \cdot I_{xcyc}^2} = \frac{1}{2}(136+64) - \frac{1}{2}\sqrt{(136-64)^2 + 4 \cdot 48^2} = 40[mm^4].$$