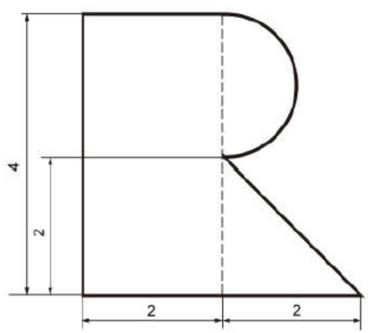
MOMENTY BEZWŁADNOŚCI-FIGURY PŁASKIE

Zadanie 2

Dla figury przedstawionej na rysunku wyznaczyć położenie głównych centralnych osi bezwładności i określić względem nich główne centralne momenty bezwładności. Wymiary kątownika zostały podane w [mm]



<u>Rozwiązanie</u>

Rozpocząć należy od wyznaczenia współrzędnych środka ciężkości dla danej figury, względem przyjętego uprzednio układu odniesienia Oxy. Współrzędne te wynoszą:

x_c = -0,52mm; y_c = 1,9mm

Przez środek ciężkości rysujemy układ współrzędnych Cx_cy_c.

W każdym ze środków ciężkości figur prostych na jakie podzieliliśmy naszą figurę rysujemy układy współrzędnych x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3. Wyliczamy odległości pomiędzy poszczególnymi, równoległymi osiami, Liczymy moment bezwładności względem osi x_c i y_c jako sumę momentów trzech figur prostych, stosując twierdzenie Steinera.

$$I_{xc} = I_x^{(1)} + A_1 \cdot 0{,}1^2 + I_x^{(2)} + A_2 \cdot 1{,}23^2 + I_x^{(3)} + A_3 \cdot 1{,}1^2 =$$
$$= \frac{2 \cdot 4^3}{12} + 8 \cdot 0{,}1^2 + \frac{2 \cdot 2^3}{36} + 2 \cdot 1{,}23^2 + \frac{\pi \cdot 1^4}{8} + 1{,}57 \cdot 1{,}1^2 = 16{,}51[mm^4]$$

$$I_{yc} = I_y^{(1)} + A_1 \cdot 0{,}48^2 + I_y^{(2)} + A_2 \cdot 1{,}19^2 + I_y^{(3)} + A_3 \cdot 0{,}94^2$$

W ostatnim wzorze nie znamy $I_y^{(3)}$ dla półkola względem osi przechodzącej przez jego środek ciężkości. Wiemy natomiast, że moment dla półkola względem średnicy jest równy $\frac{\pi \cdot r^4}{8}$.

Więc z twierdzenia Steinera

$$I_y^{(3)} = \frac{\pi \cdot 1^4}{8} - \frac{\pi \cdot 1^2}{2}\left(\frac{4}{3}\frac{1}{\pi}\right)^2 = \frac{\pi}{8} - \frac{8}{9 \cdot \pi}[mm^4]$$

podstawiając

$$I_{yc} = \frac{4 \cdot 2^3}{12} + 8 \cdot 0{,}48^2 + \frac{2 \cdot 2^3}{36} + 2 \cdot 1{,}19^2 + \frac{\pi}{8} - \frac{8}{9 \cdot \pi} + 1{,}57 \cdot 0{,}94^2 = 9{,}28[mm^4]$$

Moment dewiacji względem osi $x_c y_c$

$$I_{xcyc} = I_{xy}^{(1)} + A_1(-0{,}1)(0{,}48) + I_{xy}^{(2)} + A_2(1{,}23)(-1{,}19) + I_{xy}^{(3)} + A_3(-1{,}1)(-0{,}94) =$$
$$= 0 + 8 \cdot (-0{,}1)(0{,}48) + (-\frac{2^2 \cdot 2^2}{72}) + 2 \cdot (1{,}23)(-1{,}19) + 0 + 1{,}57 \cdot (-1{,}1)(-0{,}94) = -1{,}91[mm^4]$$

Następnie wyznaczamy kąt φ_o jaki należy odmierzyć od osi x_c aby znaleźć położenie osi głównych

$$tg2\varphi_o = -\frac{2 \cdot I_{xcyc}}{I_{xc} - I_{yc}} = \frac{2 \cdot 1{,}91}{16{,}51 - 9{,}28} = 0{,}528$$

więc

$$2\varphi_o = 27{,}8^o; \qquad \varphi_o = 13{,}9^o$$

Aby stwierdzić czy os I_{max} (1)będzie obrócona względem osi x_c o kąt φ_o, czy $\varphi_o + 90^o$ podstawiamy wyliczone wartości do wzoru transformacyjnego

$$I_\xi = \frac{1}{2}(I_{xc} + I_{yc}) + \frac{1}{2}(I_{xc} - I_{yc}) \cdot \cos 2\varphi_o - I_{xcyc} \cdot \sin 2\varphi_o =$$

$$= \frac{16{,}51 + 9{,}28}{2} + \frac{16{,}51 - 9{,}28}{2} \cdot \cos 27{,}8^o + 1{,}91 \cdot \sin 27{,}8^o = 16{,}98[mm^4]$$

widzimy, że wyliczone $I_\xi > I_{xc}$,

Stwierdzamy zatem, że oś 1 (dla I_{max}), ustala kąt , $\varphi_o = 13{,}9$. Oś 2 (dla I_{min}) jest więc nachylona do dodatniego kierunku osi x_c pod kątem $\varphi_o + 90^o$, (rys. 6.2.2).

Wyliczone I_ξ jest oczywiście równe maksymalnemu, centralnemu momentowi bezwładności figury I_1

Główne centralne momenty bezwładności wyliczamy ze wzorów

$$I_1 = \frac{1}{2}(I_{xc} + I_{yc}) + \frac{1}{2}\sqrt{(I_{xc} - I_{yc})^2 + 4 \cdot I_{xcyc}^2} = \frac{1}{2}(16{,}51 + 9{,}28) + \frac{1}{2}\sqrt{(16{,}51 - 9{,}28)^2 + 4 \cdot 1{,}91^2}$$

$$I_1 = 16{,}98[mm^4],$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(I_{xc} + I_{yc}) - \frac{1}{2}\sqrt{(I_{xc} - I_{yc})^2 + 4 \cdot I_{xcyc}^2} = \frac{1}{2}(16{,}51 + 9{,}28) - \frac{1}{2}\sqrt{(16{,}51 - 9{,}28)^2 + 4 \cdot 1{,}91^2}$$

$$I_2 = 8{,}81[mm^4].$$