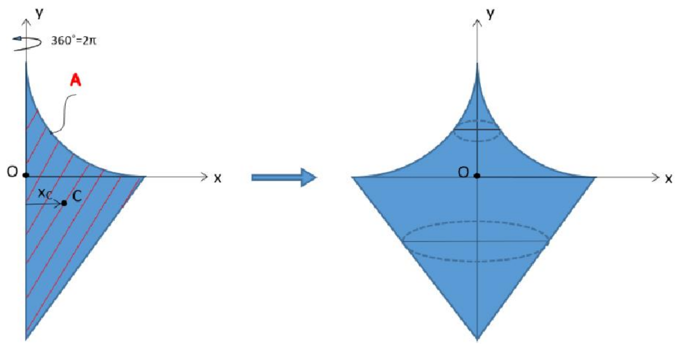
GEOMETRIA MAS
PRZYKŁADOWE ZADANIA ROZWIĄZANE

Zad.1

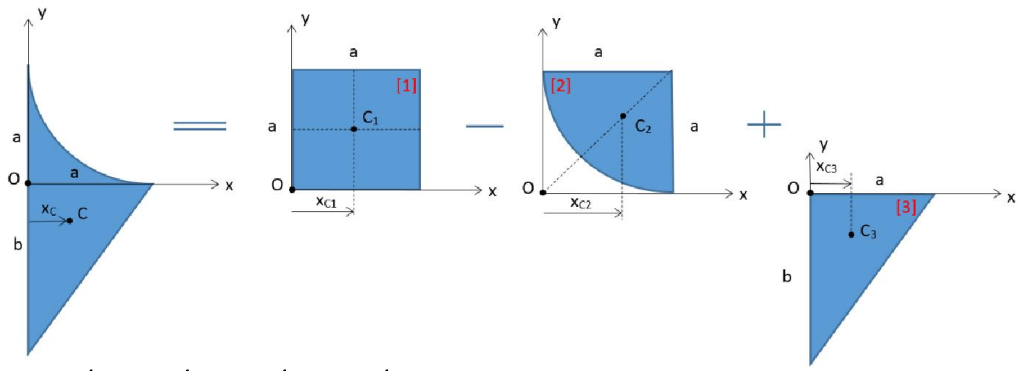
Figurę przedstawioną na rysunku obok obrócono o 360˚ wokół osi y. Znaleźć objętość utworzonej bryły.
Przyjąć dane a = 1[m], b=2[m].

ROZWIĄZANIE
Objętość wyznaczamy w oparciu o regułę Pappusa-Guldina: $V = 2\pi x_C A$



x_C – odległość środka masy figury od osi obrotu A – pole powierzchni figury, którą obracamy o 2π

Figurę da się podzielić na elementy o prostych kształtach i znanych położeniach środków mas (nie trzeba zatem całkować):
[1] kwadrat
[2] ćwierć koła
[3] trójkąt

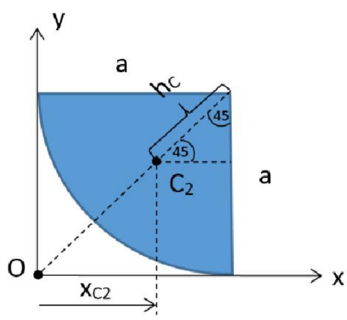


$$x_C = \frac{A_1 x_{C1} - A_2 x_{C2} + A_3 x_{C3}}{A_1 - A_2 + A_3} = \frac{A_1 x_{C1} - A_2 x_{C2} + A_3 x_{C3}}{A}$$

$A_1 = a^2 = (1[m])^2 = 1\ [m^2]$ $\qquad$ $x_{C1} = \frac{a}{2} = 0.5\ [m]$

$A_2 = \frac{1}{4}\pi a^2 = \frac{1}{4}\pi(1[m])^2 = 0.785[m^2]$ $\qquad$ $x_{C2} = ?$

$A_3 = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\cdot 1[m]\cdot 2[m] = 1[m^2]$ $\qquad$ $x_{C3} = \frac{1}{3}a = 0.33\ [m]$



$$x_{C2} = a - h_C \cdot \cos 45°$$

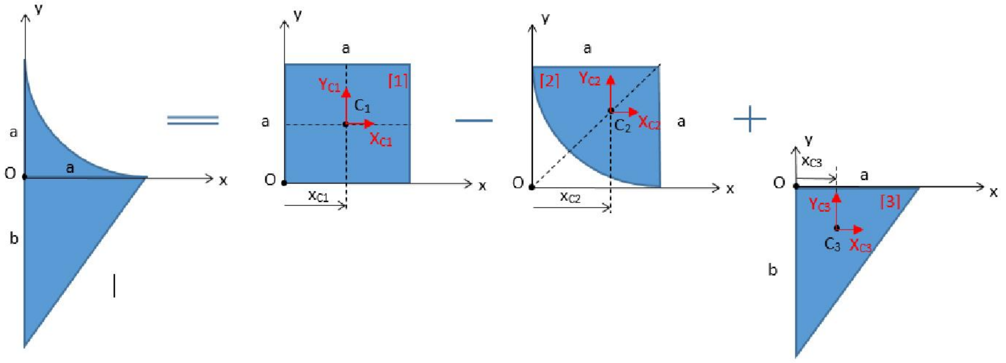
$$h_C = \frac{2}{3} a \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{8a}{3\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4a}{3\pi}\sqrt{2}$$

$$x_{C2} = a - h_C \cdot \cos 45° = a - \frac{4a\sqrt{2}}{3\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = a - \frac{4a}{3\pi} = 1 - \frac{4}{3\pi} = 0.58[m]$$

$$V = 2\pi x_C A = 2\pi \frac{A_1 x_{C1} - A_2 x_{C2} + A_3 x_{C3}}{A} \cdot A = 2\pi (A_1 x_{C1} - A_2 x_{C2} + A_3 x_{C3})$$
$$V = 2\pi (1\ [m^2] \cdot 0.5\ [m] - 0.785 [m^2] \cdot 0.58 [m] + 1 [m^2] \cdot 0.33\ [m]) = 2\pi \cdot 0.3747 [m^3] = 2.35\ [m^3]$$

Zad.2

Dla figury przedstawionej na rysunku wyznaczyć momenty bezwładności względem osi x i y oraz moment dewiacji. Utworzyć macierz bezwładności w punkcie O.

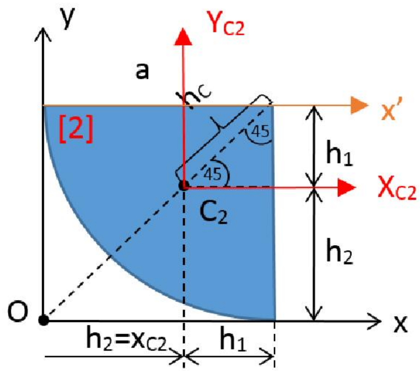


$$I_x = I_{x[1]} - I_{x[2]} + I_{x[3]}$$
$$I_y = I_{y[1]} - I_{y[2]} + I_{y[3]}$$
$$I_{xy} = I_{xy[1]} - I_{xy[2]} + I_{xy[3]}$$

<u>[1] - kwadrat</u>

$$I_{x[1]} = \frac{1}{3} A_1 a^2 = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a^2 = \frac{1}{3} a^4 = \frac{1}{3}\ [m^4] = 0.33\ [m^4]$$
$I_{y[1]} = I_{x[1]} = 0.33\ [m^4]$ (identyczny rozkład masy jak dla osi (x))
$$I_{xy[1]} = \underbrace{I_{X_{C1} Y_{C1}}}_{=0} + A_1 \frac{a}{2} \frac{a}{2} = 0 + 1 [m^2] \cdot \frac{1}{2} [m] \cdot \frac{1}{2} [m] = 0.25\ [m^4]$$

<u>[2] – ćwierć koła</u>



Z tw. Steinera:

$$I_{x'} = I_{X_{C2}} + A_2 (h_1)^2 \qquad \rightarrow \qquad I_{X_{C2}} = I_{x'} - A_2 (h_1)^2$$
$$I_x = I_{X_{C2}} + A_2 (h_2)^2$$

zatem

$$I_x = \underbrace{I_{x'} - A_2 (h_1)^2}_{I_{X_{C2}}} + A_2 (h_2)^2 = I_{x'} + A_2 ((h_2)^2 - (h_1)^2)$$

gdzie

$$I_{x'} = \frac{1}{16} \pi a^4 = \frac{1}{16} \pi \cdot (1 [m])^4 = 0.2\ [m^4]$$
$$h_1 = h_C \cdot \sin 45° = \frac{4a\sqrt{2}}{3\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4a}{3\pi} = \frac{4}{3\pi}\ [m] = 0.424\ [m]$$
$$h_2 = a - h_1 = 1 [m] - 0.424\ [m] = 0.576\ [m]$$

$$I_x = I_{x'} + A_2 ((h_2)^2 - (h_1)^2) = 0.2\ [m^4] + 0.785 [m^2] \cdot ((0.576\ [m])^2 - (0.424\ [m])^2) = 0.32\ [m^4]$$

$$\boxed{I_{x[2]} = I_x = 0.32\ [m^4]}$$

Ze względu na symetrię tzn. identyczny rozkład masy względem osi (y) i (x): $I_y = I_x$

$\boxed{I_{y[2]} = I_y = 0.32\ [m^4]}$

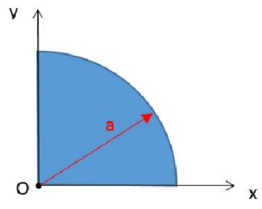
Moment dewiacji $I_{xy[2]}$ =?

Wiemy, że dla <u>ćwiartki koła</u> momenty bezwładności względem osi (x) i (y) wynoszą:

$$I_x = I_y = \frac{1}{4}Aa^2$$

$$A = \frac{1}{4}\pi a^2$$

$$I_x = I_y = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\pi a^2 \cdot a^2 = \frac{1}{16}\pi a^4$$



natomiast moment dewiacji:

$I_{xy} = \frac{1}{8}a^4$ - wartość dodatnia, bo całe pole jest w dodatnim zakresie osi (x) i (y)

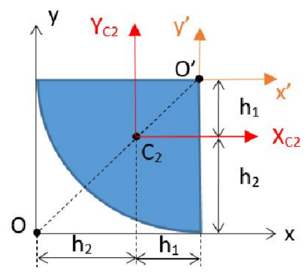
U nas w zadaniu znany jest zatem moment dewiacji względem układu osi (x') i (y') (patrz rysunek poniżej). Całe pole znajduje się teraz w ujemnej części tych osi. Ponieważ obie współrzędne (x') i (y') są ujemne to wartość momentu dewiacji jest dodatnia.

$$I_{x'y'} = \frac{1}{8}a^4 = \frac{1}{8}\cdot(1[m])^4 = 0.125[m^4]$$

Potrzeba jest wyznaczyć moment dewiacji względem układu osi (x) i (y), korzystamy zatem dwukrotnie z *tw. Steinera dla momentów dewiacji*.

Człon steinerowski zawiera pole powierzchni ćwiartki koła A_2 pomnożone przez <u>współrzędne punktu C₂ w układzie Oxy</u>: [h_2, h_2], obie współrzędne są w tym układzie dodatnie.

$$I_{xy} = I_{X_{C2}Y_{C2}} + \underbrace{A_2 h_2 h_2}_{człon\ steinerowski}$$



$I_{X_{C2}Y_{C2}}$ wyznaczamy w oparciu o $I_{x'y'}$. Teraz człon steinerowski zawiera pole powierzchni ćwiartki koła A_2 pomnożone przez <u>współrzędne punktu C₂ w układzie O'x'y'</u>: [$-h_1, -h_1$], obie współrzędne są w tym układzie ujemne.

$$I_{x'y'} = I_{X_{C2}Y_{C2}} + A_2(-h_1)(-h_1) \quad \rightarrow \quad I_{X_{C2}Y_{C2}} = I_{x'y'} - A_2 h_1^2$$

zatem

$$I_{xy} = I_{X_{C2}Y_{C2}} + A_2 h_2^2 = \underbrace{I_{x'y'} - A_2 h_1^2}_{I_{X_{C2}Y_{C2}}} + A_2 h_2^2 = I_{x'y'} + A_2(h_2^2 - h_1^2)$$

$$\boxed{I_{xy} = I_{x'y'} + A_2(h_2^2 - h_1^2)}$$

$$I_{xy} = 0.125[m^4] + 0.785[m^2]\cdot((0.576\ [m])^2 - (0.424\ [m])^2) = 0.244\ [m^4]$$

$$\boxed{I_{xy[2]} = I_{xy} = 0.244\ [m^4]}$$

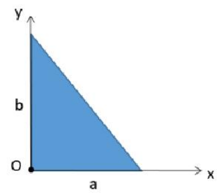
<u>[3] – trójkąt</u>

Wiemy, że dla <u>trójkąta</u> momenty bezwładności i dewiacji względem osi (x) i (y) wynoszą:

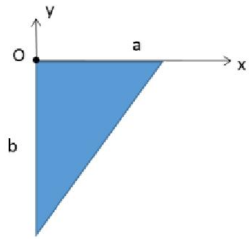
$$I_x = \frac{1}{6}Ab^2 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}ab\cdot b^2 = \frac{1}{12}ab^3$$

$$I_y = \frac{1}{6}Aa^2 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}ab\cdot a^2 = \frac{1}{12}ba^3$$

$$I_{xy} = \frac{1}{24}a^2b^2$$



U nas w zadaniu oś (y) jest skierowana przeciwnie, zatem trójkąt ma współrzędne (x) dodatnie, zaś (y) ujemne. Wpłynie to na znak momentu dewiacji, który w takim wypadku będzie ujemny.



$$I_{xy} = -\frac{1}{24}a^2b^2 = -\frac{1}{24}\cdot(1[m])^2\cdot(2[m])^2 = -0.166\ [m^4]$$

Momenty bezwładności wynoszą:

$$I_x = \frac{1}{6}Ab^2 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}ab\cdot b^2 = \frac{1}{12}ab^3 = \frac{1}{12}\cdot 1[m]\cdot(2[m])^3 = 0.66\ [m^4]$$
$$I_y = \frac{1}{6}Aa^2 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}ab\cdot a^2 = \frac{1}{12}ba^3 = \frac{1}{12}\cdot 2[m]\cdot(1[m])^3 = 0.166\ \ [m^4]$$

zatem

$$I_{xy[3]} = I_{xy} = -0.166\ [m^4]$$
$$I_{x[3]} = I_x = 0.66\ [m^4]$$
$$I_{y[3]} = I_y = 0.166\ \ [m^4]$$

Ostatecznie momenty bezwładności i moment dewiacji całej figury względem układu osi Oxy wynoszą

$$I_x = I_{x[1]} - I_{x[2]} + I_{x[3]} = 0.33\ [m^4] - 0.32\ [m^4] + 0.66[m^4] = 0.67\ \ [m^4]$$
$$I_y = I_{y[1]} - I_{y[2]} + I_{y[3]} = 0.33\ [m^4] - 0.32\ [m^4] + 0.166\ [m^4] = 0.176\ [m^4]$$
$$I_{xy} = I_{xy[1]} - I_{xy[2]} + I_{xy[3]} = 0.25\ [m^4] - 0.244\ [m^4] + (-0.166\ [m^4]) = -0.16\ [m^4]$$

$$I_x = 0.67\ \ [m^4]$$
$$I_y = 0.176\ [m^4]$$
$$I_{xy} = -0.16\ [m^4]$$

Momenty bezwładności są zawsze dodatnie ! Moment dewiacji wyszedł ujemy co oznacza, że większa część figury znajduje się w ujemnej części osi y (x są dodatnie). Osie (x) i (y) nie są osiami głównymi.

Macierz bezwładności w punkcie O ma postać:

$$I_O = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.67 & 0.16 \\ 0.16 & 0.176 \end{bmatrix}$$

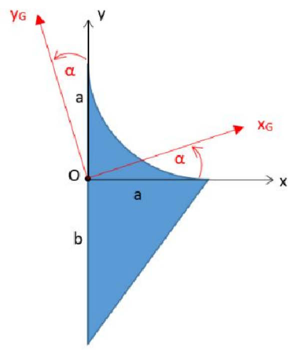
Zad.3

O jaki kąt należy obrócić układ osi Oxy aby stał się układem osi głównych w punkcie O?

ROZWIĄZANIE

Kąt o jaki należy obrócić układ aby stał się układem osi głównych wyznaczamy ze wzoru:

$$tg(2\alpha) = \frac{-I_x}{I_x \overset{y}{-} I_y}$$



$$tg(2\alpha) = \frac{0.16\ [m^4]}{0.67\ \ [m^4] - 0.176\ [m^4]} = 0.32\ [-]$$

$$2\alpha = arctg(0.32\ ) = 0.31\ [rad]$$
$$\alpha = \frac{1}{2}\cdot 0.31\ [rad] = 0.155\ [rad] = 0.155\ [rad]\cdot\frac{360\ [°]}{2\pi\ [rad]} = 8.88\ [°]$$

Kąt wyszedł dodatni, tak więc obracamy oś (x) w kierunku osi (y) otrzymując oś główną (x_G) i analogicznie oś (y) o ten sam kąt otrzymując oś główną (y_G).

Zad.4

Znaleźć wartość głównych momentów bezwładności w punkcie O? Utworzyć macierz bezwładności w punkcie O dla osi głównych.

ROZWIĄZANIE

Wartości momentów głównych dla figur płaskich (przekrojów) wyznaczamy ze wzorów:

$$I_{xG} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}{}^2}$$

$$I_{yG} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}{}^2}$$

w oparciu o macierz w punkcie O układu Oxy: $I_O = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.67 & 0.16 \\ 0.16 & 0.176 \end{bmatrix}$

zatem

$$I_{xG} = \frac{0.67 + 0.176}{2} + \sqrt{\left(\frac{0.67 - 0.176}{2}\right)^2 + (-0.16)^2} = 0.423 + 0.29 = 0.717\ [m^4]$$

$$I_{yG} = 0.423 - 0.29 = 0.133\ [m^4]$$

Macierz bezwładności w punkcie O dla osi głównych (x_G) i (y_G):

$$I_O = \begin{bmatrix} I_{xG} & -I_{xGyG} \\ -I_{xGyG} & I_{yG} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.717 & 0 \\ 0 & 0.133 \end{bmatrix}$$

UWAGA:

Gdybyśmy obracali układ osi pozostawiając początek układu w punkcie O to dla osi głównych momenty bezwładności będą ekstremalne. Jeden będzie największy z możliwych, drugi najmniejszy.

Sprawdźmy:

$I_{yG} = 0.133\ [m^4]$ – jest najmniejszy

$I_{xG} = 0.717\ [m^4]$ – jest największy

natomiast wartości

$I_y = 0.176\ [m^4]\quad i\quad I_x = 0.67\ [m^4]$ zawierają się pomiędzy nimi.