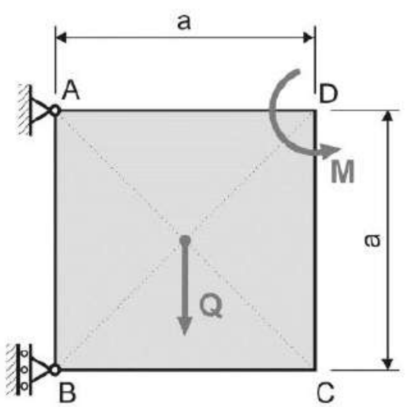
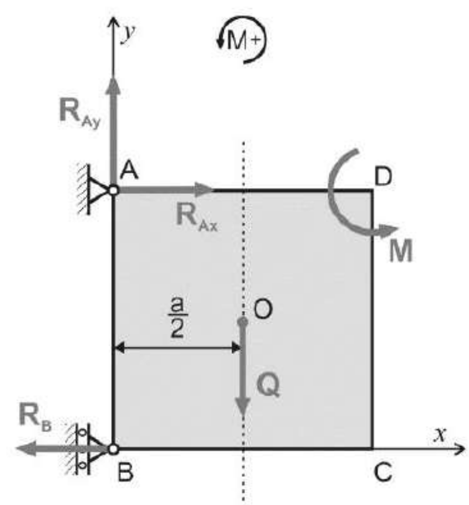
Zadanie 1

Kwadratowa płyta ABCD o boku a=1m i ciężarze Q=5kN została przymocowana do ściany za pomocą podpory nieprzesuwnej (przegub) w punkcie A oraz za pomocą podpory przesuwnej w punkcie B. W punkcie D działa moment M=4kNm. Obliczyć reakcje podporowe.



1. Wybieramy układ współrzędnych i uwalniamy od więzów.
2. Zaznaczamy wszystkie siły czynne.
3. W zadaniu są 3 niewiadome (R_{Ax}, R_{Ay}, R_B).
4. Rozpoznajemy płaski dowolny układ sił, w którym są 3 liniowo niezależne równania równowagi.
5. Układ jest więc statycznie wyznaczalny.



Układ równań równowagi, z którego wyznaczamy niewiadome:

$$\begin{cases} \sum P_{ix} = R_{Ax} - R_B = 0 \\ \sum P_{iy} = -Q + R_{Ay} = 0 \\ \sum M_{iB} = M - R_{Ax} \cdot a - Q \cdot \dfrac{a}{2} = 0 \end{cases}$$

Równanie sprawdzające:

$$\sum M_{iO} = M - R_{Ay} \cdot \frac{a}{2} - R_{Ax} \cdot \frac{a}{2} - R_B \cdot \frac{a}{2} = 0$$

Z równań równowagi statycznej obliczamy:

$$\begin{cases} R_{Ax} = R_B \\ R_{Ay} = Q \\ R_{Ax} = \dfrac{M}{a} - \dfrac{Q}{2} \end{cases}$$

stąd szukane reakcje wynoszą:

$$R_B = 1.5kN$$
$$R_{Ax} = 1.5kN$$
$$R_{Ay} = 5.0kN$$
$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 5.22kN$$

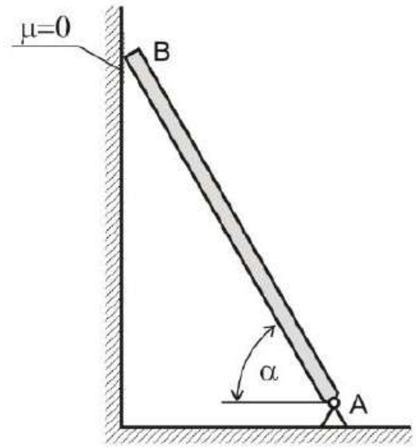
Sprawdzenie

(0=0) Reakcje zostały obliczone poprawnie.

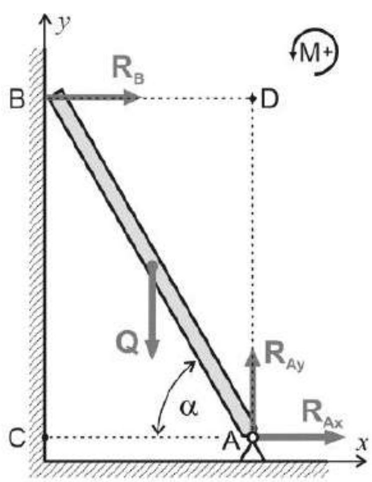
$$\sum M_{iO} = 4kNm - 5kN \cdot \frac{1m}{2} - 1{,}5kN \cdot \frac{1m}{2} - 1{,}5 \cdot \frac{1m}{2} = 0$$

Zadanie 2

Jednorodna, sztywna belka AB o długości l=2m i ciężarze Q=5kN została podparta w punkcie A za pomocą podpory nieprzesuwnej i końcem B belki oparta o idealnie gładką ścianę tak, że tworzy z poziomem kąt $\alpha = \pi/3$. Obliczyć wielkość reakcji w punkach A i B.



1. Wybieramy układ współrzędnych i uwalniamy od więzów.
2. Zaznaczamy wszystkie siły czynne.
3. W zadaniu są 3 niewiadome (R_{Ax}, R_{Ay}, R_B).
4. Rozpoznajemy płaski dowolny układ sił, w którym są 3 liniowo niezależne równania równowagi. Układ jest więc statycznie wyznaczalny.
5. Układ równań równowagi, z którego wyznaczamy niewiadome.



Układ równań równowagi, z którego wyznaczamy niewiadome:

$$\begin{cases} \sum M_{iA} = -R_B \cdot l \sin\alpha + Q \cdot \frac{l}{2} \cos\alpha = 0 \\ \sum P_{iy} = -Q + R_{Ay} = 0 \\ \sum M_{iD} = R_{Ax} \cdot l \sin\alpha + Q \cdot \frac{l}{2} \cos\alpha = 0 \end{cases}$$

Równanie sprawdzające:

$$\sum M_{iC} = R_{Ay} \cdot l \cos\alpha - R_B \cdot l \sin\alpha - Q \cdot \frac{l}{2} \cos\alpha = 0$$

Z równań równowagi mamy:

$$\begin{cases} R_B = \dfrac{Q \cdot \cos\alpha}{2 \cdot \sin\alpha} \\ R_{Ay} = Q \\ R_{Ax} = -\dfrac{Q \cdot \cos\alpha}{2 \cdot \sin\alpha} \end{cases}$$

skąd, po uwzględnieniu danych otrzymujemy ostatecznie:

$$R_B = \frac{5\sqrt{3}}{6} kN$$

$$R_{Ay} = 5kN$$

$$R_{Ax} = -\frac{5\sqrt{3}}{6} kN$$

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \frac{5}{6}\sqrt{37} kN$$

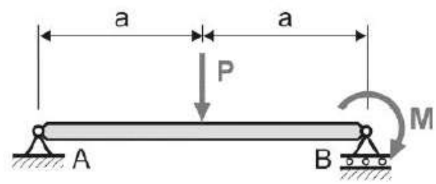
Sprawdzenie

(0=0) Reakcje zostały obliczone poprawnie.

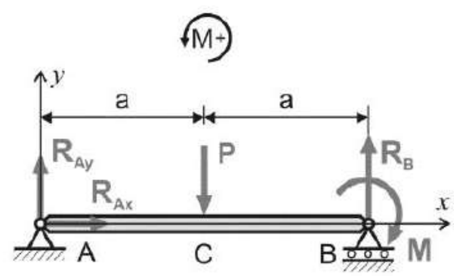
$$\sum M_{iC} = 5kN \cdot 2m \cdot \cos 60^0 - \frac{5\sqrt{3}}{6} kN \cdot 2m \cdot \sin 60^0 - 5kN \cdot \frac{2m}{2} \cdot \cos 60^0 = 0$$

Zadanie 3

Belka AB o długości 2m (a=1m) została podparta na końcach i obciążona w połowie długości skupioną siłą P=2kN oraz na końcu B momentem zginającym M=2kNm. Obliczyć reakcje podporowe R_A oraz R_B.



1. Wybieramy układ współrzędnych i uwalniamy od więzów.
2. Zaznaczamy wszystkie siły czynne.
3. W zadaniu są 3 niewiadome (R_{Ax}, R_{Ay}, R_B).
4. Rozpoznajemy płaski dowolny układ sił, w którym są 3 liniowo niezależne równania równowagi.
5. Układ jest więc statycznie wyznaczalny.



Układ równań równowagi, z którego wyznaczamy niewiadome:

$$\begin{cases} \sum M_{iA} = -P \cdot a + R_B \cdot 2a - M = 0 \\ \sum P_{iy} = -P + R_{Ay} + R_B = 0 \\ \sum P_{ix} = R_{Ax} = 0 \end{cases}$$

Równanie sprawdzające:

$$\sum M_{iC} = -R_{Ay} \cdot a + R_B \cdot a - M = 0$$

Z równań równowagi otrzymujemy:

$$\begin{cases} R_B = \dfrac{M}{2a} + \dfrac{P}{2} \\ R_{Ay} = P - \left(\dfrac{M}{2a} + \dfrac{P}{2}\right) \\ R_{Ax} = 0 \end{cases}$$

i ostatecznie obliczamy szukane wielkości:

$$R_B = 2kN$$
$$R_{Ay} = 0kN$$
$$R_{Ax} = 0kN$$
$$R_A = 0kN$$

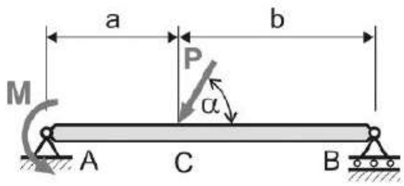
Sprawdzenie

Reakcje zostały obliczone poprawnie (0=0).

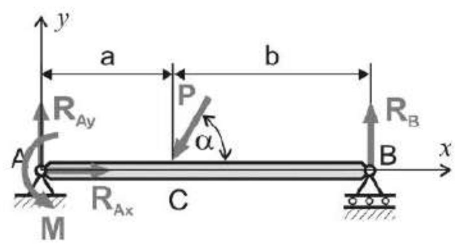
$$\sum M_{iC} = -0 \cdot 1m + 2kN \cdot 1m - 2kNm = 0$$

Zadanie 4

Belka AB została podparta na końcach i obciążona w punkcie C skupioną siłą P=5kN nachyloną pod kątem $\alpha = \pi/3$ do poziomu. Na koniec A belki działa moment M=1kNm. Obliczyć reakcje podporowe R_A oraz R_B jeżeli a=2m i b=3m.



1. Wybieramy układ współrzędnych i uwalniamy od więzów.
2. Zaznaczamy wszystkie siły czynne.
3. W zadaniu są 3 niewiadome (R_{Ax}, R_{Ay}, R_B).
4. Rozpoznajemy płaski dowolny układ sił, w którym są 3 liniowo niezależne równania równowagi.
5. Układ jest więc statycznie wyznaczalny.



Układ równań równowagi, z którego wyznaczamy niewiadome:

$$\begin{cases} \sum M_{iA} = -P\sin\alpha \cdot a + R_B \cdot (a+b) + M = 0 \\ \sum P_{iy} = -P\sin\alpha + R_{Ay} + R_B = 0 \\ \sum P_{ix} = R_{Ax} - P\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

Równanie sprawdzające:

$$\sum M_{iC} = -R_{Ay} \cdot a + R_B \cdot b + M = 0$$

Rozwiązując układ równań równowagi otrzymujemy:

$$\begin{cases} R_B = \dfrac{P\sin\alpha \cdot a - M}{(a+b)} \\ R_{Ay} = P\sin\alpha - \dfrac{P\sin\alpha \cdot a - M}{(a+b)} \\ R_{Ax} = P\cos\alpha \end{cases}$$

i ostatecznie obliczamy:

$$R_B = 1{,}53kN$$
$$R_{Ay} = 2{,}80kN$$
$$R_{Ax} = 2{,}50kN$$
$$R_A = 6{,}37kN$$

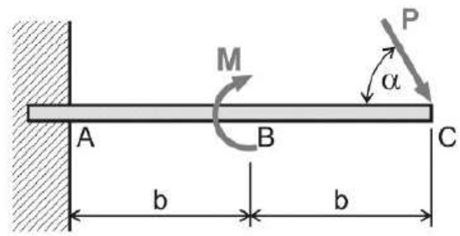
Sprawdzenie

(0=0) Reakcje zostały obliczone poprawnie.

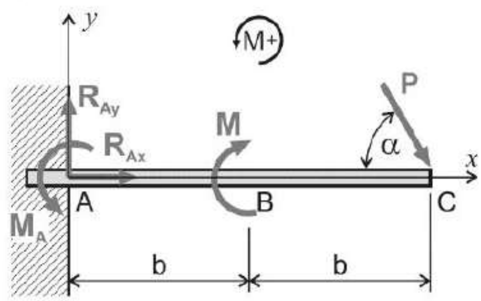
$$\sum M_{iC} = -2{,}80 \cdot 2m + 1{,}53kN \cdot 3m + 1kNm = 0$$

Zadanie 5

Belka AC o długości 2m (b=1m) została końcem A utwierdzona w ścianie i obciążona w połowie długości, w punkcie B momentem zginającym M=4kNm oraz na kocu C siłą skupioną P=2kN nachyloną do poziomu pod kątem $\alpha = \pi/3$. Obliczyć reakcje w miejscu utwierdzenia belki.



1. Wybieramy układ współrzędnych.
2. Uwalniamy od więzów.
3. Zaznaczamy wszystkie siły czynne.
4. W zadaniu są 3 niewiadome (R_{Ax}, R_{Ay}, M_A).
5. Rozpoznajemy płaski dowolny układ sił, w którym są 3 liniowo niezależne równania równowagi.
6. Układ jest więc statycznie wyznaczalny.



Układ równań równowagi, z którego wyznaczamy niewiadome:

$$\begin{cases} \sum M_{iA} = M_A - M - P\sin\alpha \cdot 2b = 0 \\ \sum P_{iy} = -P\sin\alpha + R_{Ay} = 0 \\ \sum P_{ix} = R_{Ax} + P\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

Równanie sprawdzające:

$$\sum M_{iB} = -R_{Ay} \cdot b + M_A - M - P\sin\alpha \cdot b = 0$$

Obliczając reakcje z równań równowagi otrzymujemy:

$$\begin{cases} M_A = M + P\sin\alpha \cdot 2b \\ R_{Ay} = P\sin\alpha \\ R_{Ax} = -P\cos\alpha \end{cases}$$

Po podstawieniu danych liczbowych:

$$M_A = 4 + 2\sqrt{3} \approx 7{,}46 kNm$$
$$R_{Ay} = \sqrt{3} \approx 1{,}73 kN$$
$$R_{Ax} = -1{,}0\, kN$$
$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 2{,}0 kN$$

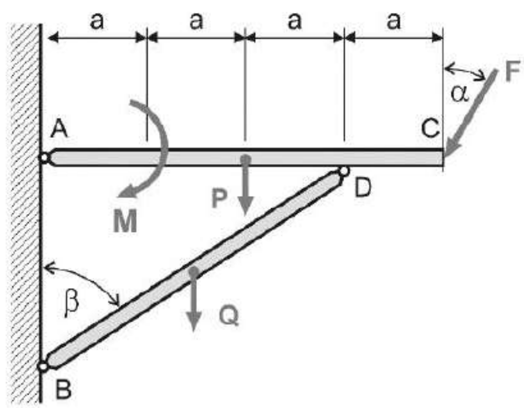
Sprawdzenie

(0=0) Reakcje zostały obliczone poprawnie.

$$\sum M_{iB} = -\sqrt{3}\, kN \cdot 1m + (4 + 2\sqrt{3})kNm - 4kN - 2kN\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1m = 0$$

Zadanie 6

Pręt AC o ciężarze P=9kN oraz pręt BD o ciężarze Q=6kB zostały połączone przegubowo w punkcie D i za pomocą przegubów zamocowane do ściany końcami A oraz B. Na pręt C działa moment M=3kNm oraz siła skupiona F= $2\sqrt{3}$ kN. Dane są także a=1m, $\alpha = \pi / 6$, oraz $\beta = \pi / 3$. Obliczyć reakcje w miejscach utwierdzenia prętów oraz reakcję w przegubie D.



1. Rozdzielamy układ na dwa odrębne pręty (bryły sztywne).
2. Wybieramy układ współrzędnych i uwalniamy od więzów.
3. Zaznaczamy wszystkie siły czynne.
4. W zadaniu jest 6 niewiadomych reakcji (R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Bx}, R_{By},R_{Dx}, R_{Dy}).
5. Dla każdego pręta rozpoznajemy płaski dowolny układ sił, w którym są 3 liniowo niezależne równania równowagi.
6. Układ jest więc statycznie wyznaczalny – mamy 6 równań i 6 niewiadomych.
7. Obliczamy długość odcinka |AB|

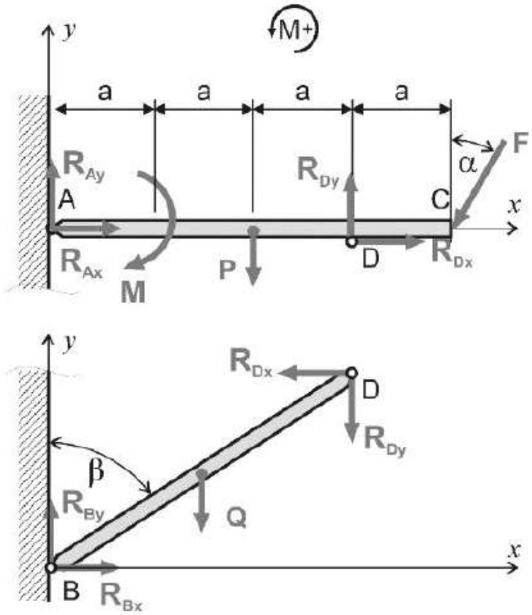
Długość odcinka |AB| obliczamy wykorzystując funkcje trygonometryczne:

$$tg\beta = \frac{3a}{|AB|}$$

Przekształcając mamy:

$$|AB| = a\sqrt{3}$$

Układy równań równowagi, z których wyznaczamy niewiadome:



- pręt AC:

$$\begin{cases} \sum M_{iA} = -M - P \cdot 2a + R_{Dy} \cdot 3a - F\cos\alpha \cdot 4a = 0 \\ \sum P_{iy} = R_{Ay} - P + R_{Dy} - F\cos\alpha = 0 \\ \sum P_{ix} = R_{Ax} + R_{Dx} - F\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

- pręt BD:

$$\begin{cases} \sum M_{iB} = -Q \cdot 1{,}5a - R_{Dy} \cdot 3a + R_{Dx} \cdot a\sqrt{3} = 0 \\ \sum P_{iy} = R_{By} - Q - R_{Dy} = 0 \\ \sum P_{ix} = R_{Bx} - R_{Dx} = 0 \end{cases}$$

Równanie sprawdzające dla układu nie rozdzielonego:

$$\sum M_{iD} = -R_{Ay} \cdot 3a - M + P \cdot a - F\cos\alpha \cdot a + Q \cdot \frac{3a}{2} + R_{Bx} \cdot a\sqrt{3} - R_{By} \cdot 3a = 0$$

Rozwiązując układ 6 równań otrzymujemy:

$$\begin{cases} R_{Dy} = \dfrac{M}{3a} + \dfrac{P \cdot 2}{3} + \dfrac{F\cos\alpha \cdot 4}{3} = 11kN \\ R_{Ay} = P - R_{Dy} + F\cos\alpha = 1kN \\ R_{Ax} = F\sin\alpha - R_{Dx} = -13\sqrt{3}\,kN \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{Dx} = \dfrac{Q \cdot \sqrt{3}}{2} + R_{Dy} \cdot \sqrt{3} = 14\sqrt{3}kN \\ R_{By} = -Q + \dfrac{M}{3a} + \dfrac{P \cdot 5}{3} + \dfrac{F\cos\alpha \cdot 4}{3} = 17kN \\ R_{Bx} = R_{Dx} = 14\sqrt{3}kN \end{cases}$$

Sprawdzenie

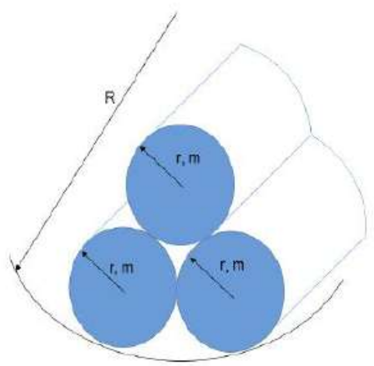
(0=0) Reakcje zostały obliczone poprawnie.

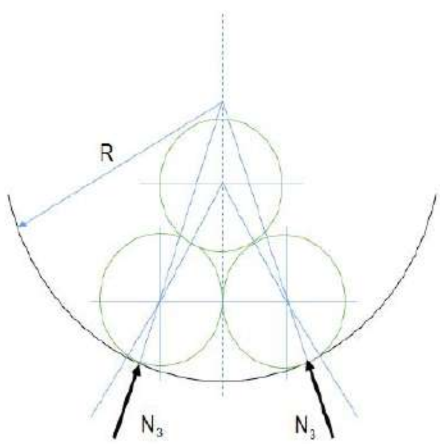
$$\sum M_{iD} = -1kN \cdot 3m - 3kNm + 9kN \cdot 1m - 2\sqrt{3}kN\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1m + 6kN \cdot \frac{3m}{2} + 14\sqrt{3}kN \cdot 1\sqrt{3}m - 17kN \cdot 3m = 0$$

Zadanie 7

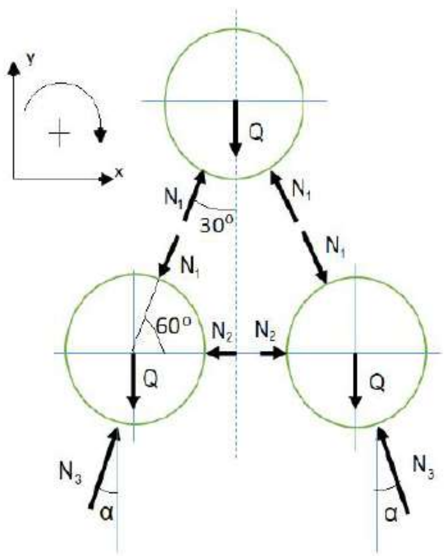
W kolistym zagłębieniu o promieniu R spoczywają 3 walce o identycznej masie m i promieniu r. Dla jakiego max R pozostaną w równowadze.

Rysunek poglądowy:





Uwalniam układ od więzów, wprowadzamy układ współrzędnych, zapisujemy równania równowagi:



Równania równowagi:

Walec górny

$$\sum F_x = 0$$
$$-Q + 2N_1 \cos 30^o = 0$$

Walec dolny

$$\sum F_x = 0$$
$$-N_2 - N_1 \cos 60^o + N_3 \sin\alpha = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$-Q + N_1 \sin 60^o + N_3 \cos\alpha = 0$$

$$N_1 = \frac{Q}{2\cos 30^o} \Rightarrow \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

$$-N_2 - \frac{Q}{\sqrt{3}}\frac{1}{2} + N_3 \sin\alpha = 0$$

$$-Q + \frac{Q}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2} + N_3 \cos\alpha = 0$$

Przekształcając równania otrzymamy

$$N_3 \sin\alpha = N_2 + \frac{Q}{\sqrt{3}}\frac{1}{2}$$

$$N_3 \cos\alpha = \frac{3}{2}Q$$

Brak kąta α, przekształcając równania otrzymamy kąt α

$$\alpha = \alpha_{kr} \Leftrightarrow N_2 = 0$$

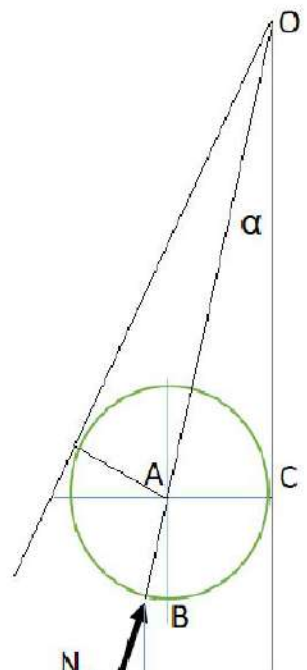
$$N_3 \sin\alpha_{kr} = N_2 + \frac{Q}{2\sqrt{3}}$$

$$N_3 \cos\alpha_{kr} = \frac{3}{2}Q$$

$$\frac{\sin\alpha_{kr}}{\cos\alpha_{kr}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$tg\alpha_{kr} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

Znając kąt krytyczny szukamy związku miedzy α i R pamiętając, że układ musi być w równowadze



$$AB = r$$
$$BO = R$$
$$\alpha = \alpha_{kr}$$
$$\sin\alpha = \frac{r}{R-r}$$
$$R = \frac{r + r\sin\alpha}{\sin\alpha}$$
$$R = r\left(\frac{1}{\sin\alpha} + 1\right)$$

Wiemy że

$$ctg\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} - 1$$

Podstawiając otrzymamy:

$$\alpha = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$
$$\frac{1}{\sin\alpha} = \sqrt{1 + \frac{1}{ctg^2\alpha}}$$
$$R = r(1 + \frac{1}{ctg^2\alpha}) = r(1 + \sqrt{1 + (3\sqrt{3})^2} = r(1 + \sqrt{28}) = r(1 + 2\sqrt{7}$$
$$R < r(1 + 2\sqrt{7})$$

Dla takiego R układ pozostanie w równowadze