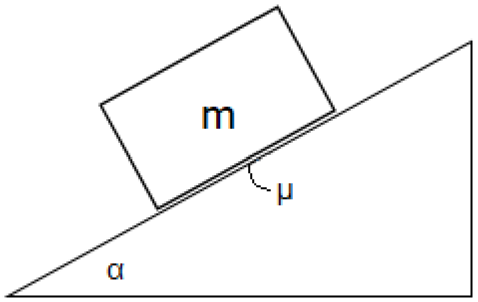
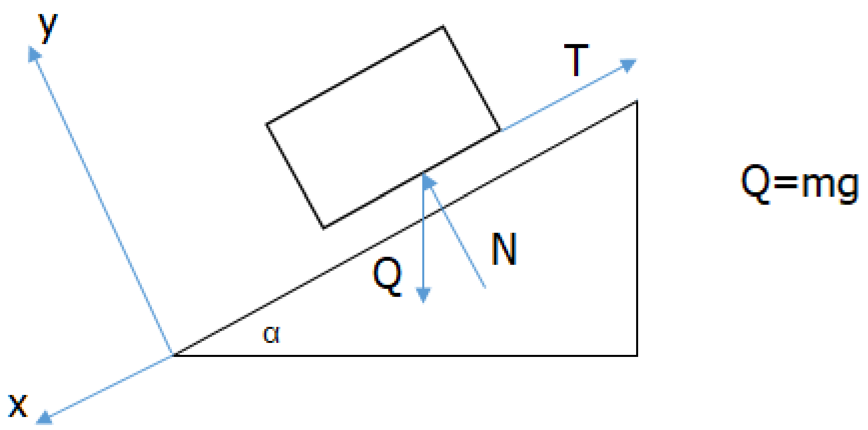
Zadanie 1

Na chropowatej równi pochyłej jest położone ciało o masie m. Dla jakiego kąta α blok zacznie się zsuwać, jeżeli współczynnik tarcia wynosi μ.





Układ osi przyjmujemy wzdłuż równi

$$\sum F_x = 0$$
$$-T + mg\sin\alpha = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$N - mg\cos\alpha = 0$$

Tarcie równanie $T = \mu N$

Przekształcając równania wyznaczamy N i T

$$N = mg\cos\alpha$$
$$T = \mu mg\cos\alpha$$

$$-\mu mg\cos\alpha + mg\sin\alpha = 0$$

skąd $tg\alpha = \mu$

W granicznym przypadku równowagi kąt nachylenia równi jest równy kątowi tarcia φ:

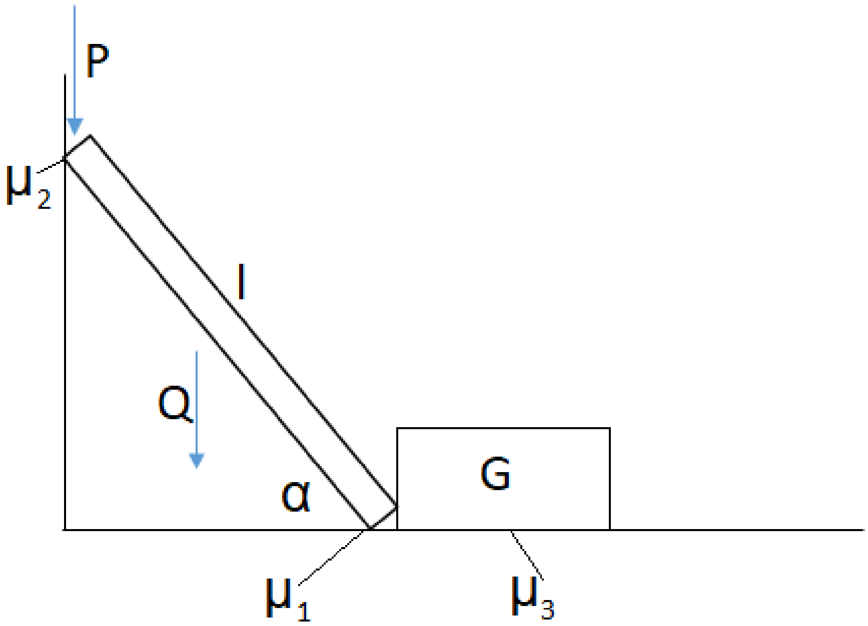
$$\mu = tg\varphi$$

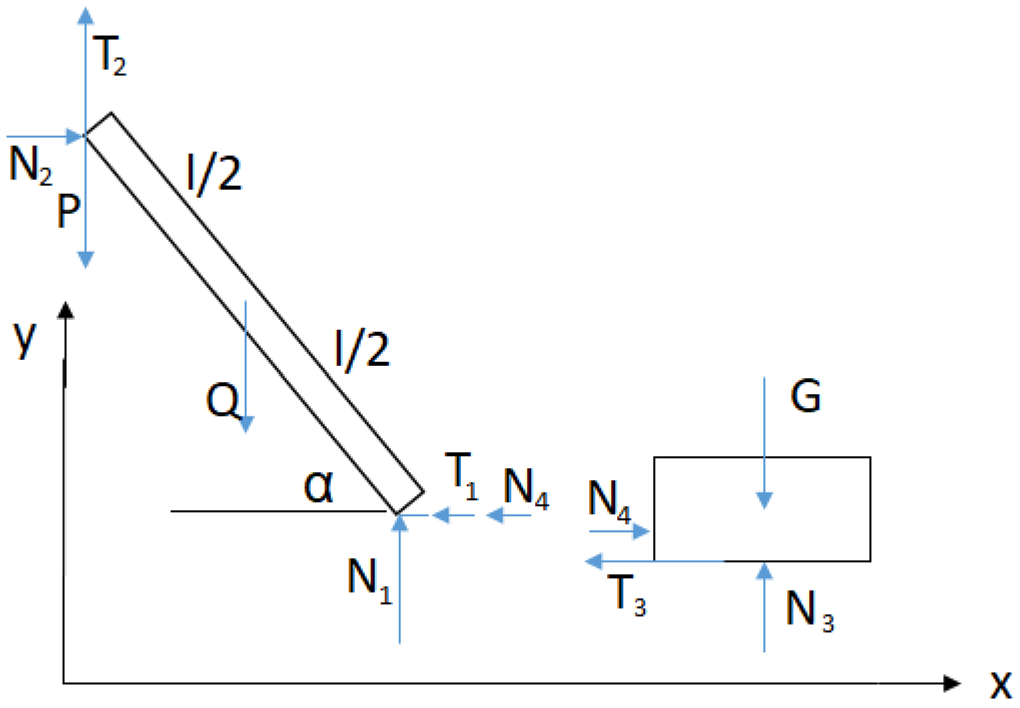
Ciężar nie zsunie się z równi gdy kąt nachylenia równi będzie mniejszy od kąta tarcia:

$$\alpha \le \varphi$$

Zadanie 2

Znając wszystkie współczynniki tarcia obliczyć ciężar skrzyni potrzebny do utrzymania drabiny w równowadze. Wiedząc że na górze drabiny znalazł się człowiek wywierający siłę P na drabinę.





Równania równowagi:

Drabina:

$$\sum F_x = 0$$
$$N_2 - N_4 - T_1 = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$T_2 - P - Q + N_1 = 0$$
$$\sum M_A = 0$$
$$-Q\frac{l}{2}\cos\alpha - Pl\cos\alpha + T_2 l\cos\alpha + N_2 l\sin\alpha = 0$$

Skrzynia:

$$\sum F_x = 0$$
$$N_4 - T_3 = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$N_3 - G = 0$$

$$N_4 = T_3$$
$$G = N_3$$

Ponieważ poślizgi działają w każdym punkcie kontaktu jednocześnie możemy napisać:

$$T_1 = \mu_1 N_1$$
$$T_2 = \mu_2 N_2$$
$$T_3 = \mu_3 N_3$$
$$N_4 = \mu_4 N_3$$

Przekształcając równania równowagi oraz wykorzystując zależności tarcia otrzymamy:

$$G = \frac{N_4}{\mu_3}$$
$$N_2 - \mu_1 N_1 - N_4 = 0$$
$$\mu_2 N_2 + N_1 = P + Q$$
$$\mu_2 N_2 + N_2 tg\alpha = \frac{Q}{2} + P$$
$$N_4 = N_2 - \mu_1 N_1$$
$$N_2 = (\frac{Q}{2} + P)\frac{1}{\mu_2 + tg\alpha}$$

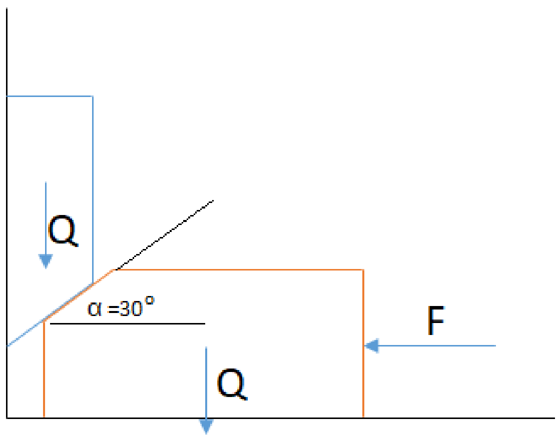
$$N_1 = P + Q - \mu_2 N_2$$
$$N_1 = P + Q - \mu_2(\frac{Q}{2} + P)\frac{1}{\mu_2 + tg\alpha}$$

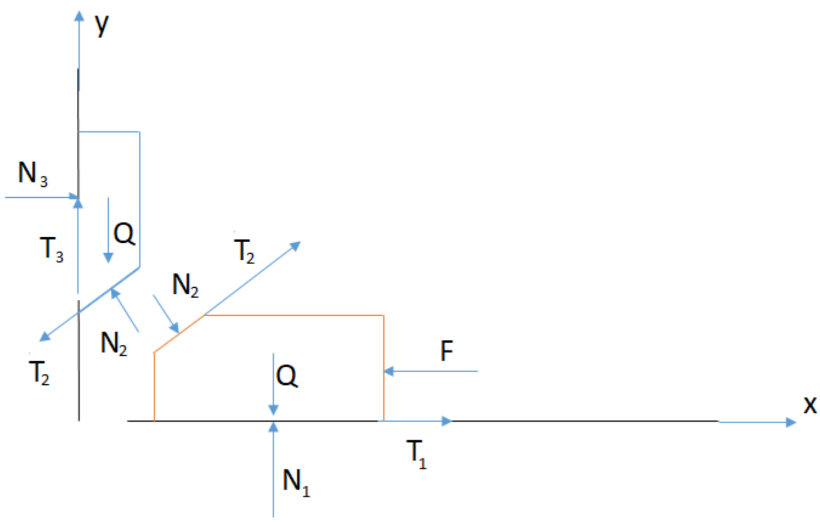
$$N_4 = (\frac{Q}{2} + P)\frac{1}{\mu_2 + tg\alpha} - \mu_1(P + Q - \mu_2(\frac{Q}{2} + P)\frac{1}{\mu_2 + tg\alpha})$$

$$G = \frac{(\frac{Q}{2} + P)\frac{1}{\mu_2 + tg\alpha} - \mu_1(P + Q - \mu_2(\frac{Q}{2} + P)\frac{1}{\mu_2 + tg\alpha})}{\mu_3}$$

Zadanie 3

Do układu dwóch klinów o ciężarach Q przyłożono poziomą siłą F. Obliczyć F aby wcisnąć klin dolny pod górny, przy założeniu że µ=const





Klin dolny:

$$\sum F_x = 0$$

$$T_1 + T_2 \cos 30^o + N_2 \sin 30^o - F = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$N_1 - Q - N_2 \cos 30^o + T_2 \sin 30^o = 0$$

Klin górny:

$$\sum F_x = 0$$
$$N_3 - T_2 \cos 30^o - N_2 \sin 30^o = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$-Q - T_3 - T_2 \sin 30^o + N_2 \cos 30^o = 0$$

Ponieważ poślizgi zachodzą jednocześnie:

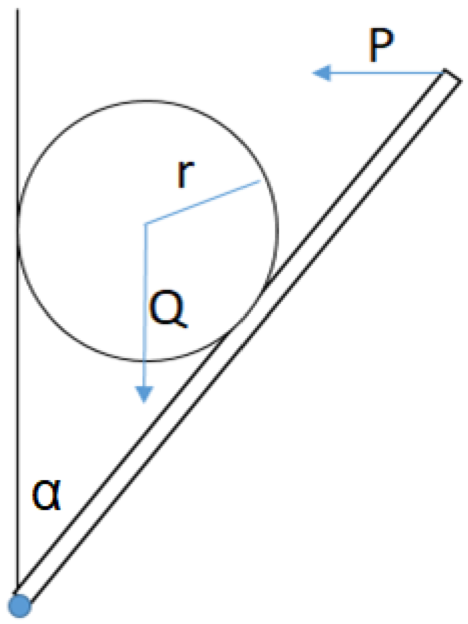
$$T_1 = \mu N_1$$
$$T_2 = \mu N_2$$
$$T_3 = \mu N_3$$

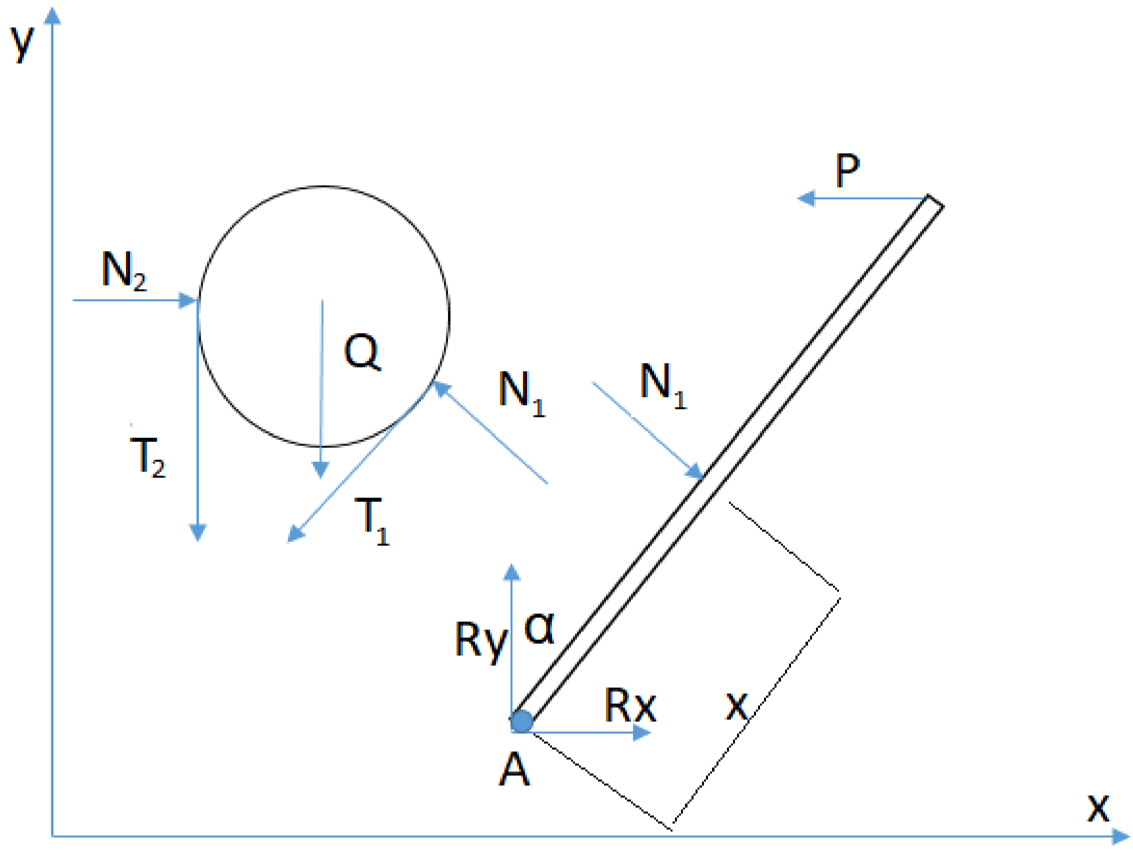
$$\mu N_1 + \mu N_2 \frac{\sqrt{3}}{2} + N_2 \frac{1}{2} - F = 0$$
$$N_1 - \mu N_2 \frac{\sqrt{3}}{2} + \mu N_2 \frac{1}{2} = Q$$
$$N_3 - \mu N_2 \frac{\sqrt{3}}{2} + N_2 \frac{1}{2} = 0$$
$$\mu N_3 + N_2 \frac{\sqrt{3}}{2} - \mu N_2 \frac{1}{2} = 0$$

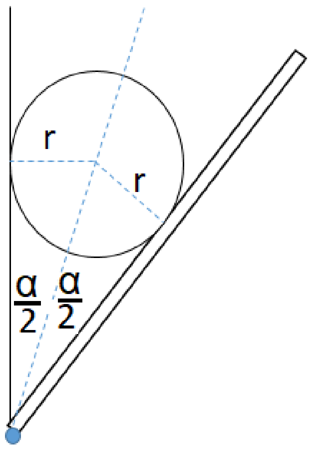
$$F = \mu N_1 + \frac{N_2}{2}(\mu\sqrt{3} + 1)$$
$$N_1 = Q + \frac{N_2}{2}(\mu\sqrt{3} + 1)$$
$$N_3 = \frac{N_2}{2}(\mu\sqrt{3} + 1)$$
$$N_2 = \frac{2Q}{\sqrt{3}(\frac{\mu^2}{2} + 1)}$$

Zadanie 4

Do nieważkiego ramienia o długości l przyłożono poziomą siłę P. Obliczyć Pmax utrzymującą walec w równowadze dla zadanego kąta α. Obliczyć kąt zakleszczenia.







$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{x}$$
$$x=rctg\frac{\alpha}{2}$$

Równania równowagi:

Ramię:

$$\sum M_A=0$$
$$-Pl\cos\alpha+N_1x=0$$

$$P=\frac{N_1x}{l\cos\alpha}\Rightarrow\frac{N_1rctg\frac{\alpha}{2}}{l\cos\alpha}$$

Obliczamy N_1 z równań równowagi walca:

$$\sum F_x=0$$
$$N_2-T_1\sin\alpha-N_1\cos\alpha=0$$
$$\sum F_y=0$$
$$-T_2-Q-T_1\cos\alpha+N_1\sin\alpha=0$$
$$\sum M_o=0$$
$$T_1r-T_2r=0$$
$$T_1=T_2$$

Tu nie można zapisać że $T_1=\mu N_1$ oraz . Należy się zastanowić jak będzie następowała utrata równowagi? Czy poślizg może wystąpić przynajmniej w jednym miejscu jeżeli tak to w którym.

Odpowiedz jest zależna od kwestii gdzie nacisk jest mniejszy :

$$\sum M_A = 0$$
$$N_2 x + Qr - N_1 x = 0$$
$$N_1 x = N_2 x + Qr$$
$$N_1 = N_2 + \frac{Qr}{x}$$
$$N_1 > N_2$$

$$T_2 = \mu N_2$$
$$T_1 \neq \mu N_1$$

Ale ponieważ

$$T_1 = T_2$$

$$T_1 = \mu N_2$$

$$\sum F_x = 0$$
$$N_2 - \mu N_2 \sin\alpha - N_1 \cos\alpha = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$-\mu N_2 - Q - \mu N_2 \cos\alpha + N_1 \sin\alpha = 0$$

$$N_2(1 - \mu\sin\alpha) - N_1 \cos\alpha = 0$$

$$N_2(-\mu - \mu\cos\alpha) + N_1 \sin\alpha = 0$$

$$N_1 = \frac{(1-\mu\sin\alpha)Q - (\mu + \mu\cos\alpha)0}{(1-\mu\sin\alpha)\sin\alpha - (\mu + \mu\cos\alpha)\cos\alpha} = \frac{Q - Q\mu\sin\alpha}{\sin\alpha - \mu\sin^2\alpha - \mu\cos\alpha - \mu\cos^2\alpha} =$$
$$= \frac{Q - Q\mu\sin\alpha}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha - \mu}$$

Kąt zakleszczenia:

$$\alpha = \alpha_2$$
$$P_{\max} \to \infty$$
$$P = P_{\max}$$

$$ctg\frac{\alpha}{2} = \infty$$
$$\frac{\alpha}{2} = 0 \,\mathrm{lub}\, \frac{\alpha}{2} = \pi$$
$$\alpha = 0 \,\mathrm{lub}\, \alpha = 2\pi$$

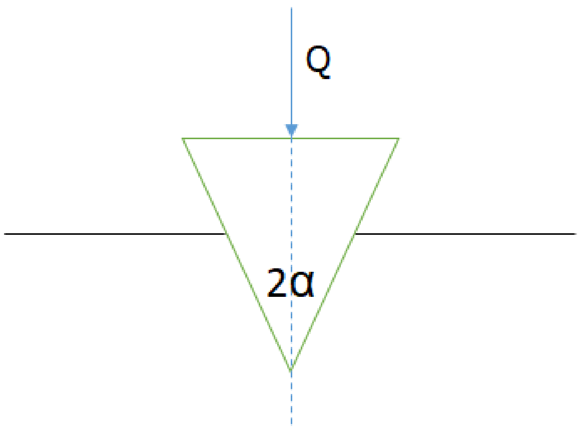
$$\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin\alpha - \mu(1-\cos\alpha) = 0$$

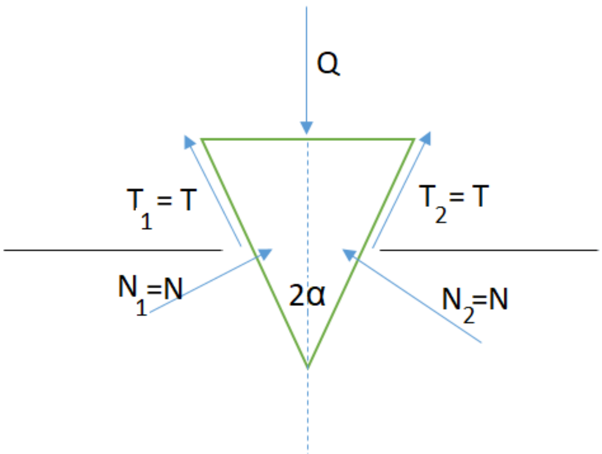
$$\mu = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = tg\frac{\alpha}{2}$$

Zadanie 5

Klin A na który działa siła Q prostopadła do podstawy wepchnięty został w ciało B. Wyznaczyć reakcje normalną N wywieraną przez ciało B na powierzchnię boczną, jeśli kąt klina wynosi 2α oraz siła P jaką należy przyłożyć aby uprzednio wepchnięty klin wyciągnąć z wgłębienia.



Klin wciskany:



$$\sum F_x = 0$$
$$N_1 \cos\alpha - N_2 \cos\alpha + T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\alpha = 0$$
$$T_1 = \mu N_1$$
$$T_2 = \mu N_2$$

$$N_1 \left(\cos\alpha + \mu \sin\alpha\right) = N_2 \left(\cos\alpha + \mu \sin\alpha\right)$$
$$N_1 = N_2 = N$$

Równanie reakcji można było założyć od razu dla układu symetrycznego ale3 należy pamiętać, że wtedy już jest wykorzystane równanie równowagi sumy sił na oś X.

Dla zbieżnego płaskiego układu sił możemy zapisać jeszcze równanie równowagi sumy sił na oś Y

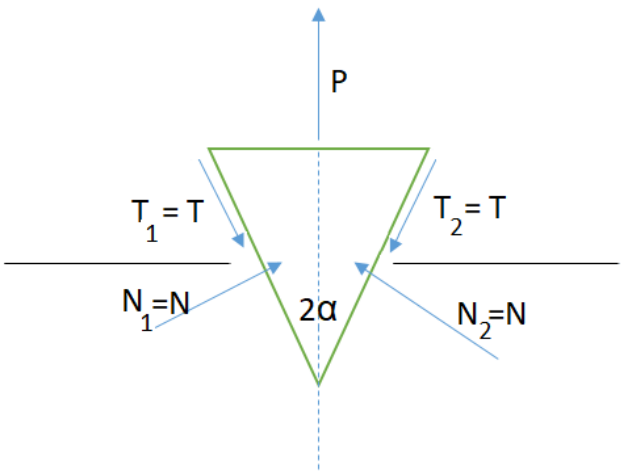
$$\sum F_y = 0$$
$$2N \sin\alpha + 2T \cos\alpha = 0$$
$$T = \mu N$$

ale ($\mu = tg\varphi$)

$$N = \frac{Q}{2(\sin\alpha + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos\alpha)} = \frac{Q\cos\alpha}{2\sin(\alpha+\varphi)}$$

Klin wyciągany:

Rozpatrujemy graniczny stan równowagi, rozkład sił dla układu symetrycznego.



$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$
$$2N \sin\alpha - 2T \cos\alpha + P = 0$$
$$T = \mu N$$

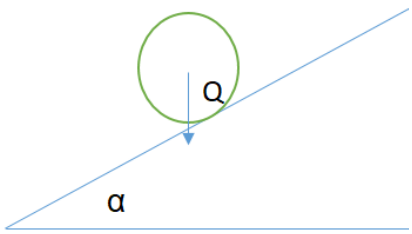
$$P=-2N\sin\alpha+2N\cos\alpha$$
$$\mu=tg\varphi$$
$$P=2N\frac{\sin\varphi\cos\alpha-\sin\alpha\cos\varphi}{\cos\varphi}$$
$$P=2N\frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\cos\varphi}$$

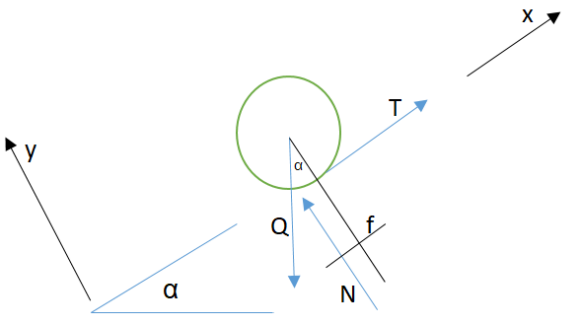
Jeżeli $\alpha>\varphi$ to P jest ujemna więc należy klin przytrzymać, żeby nie wyskoczył

Warunek $\alpha\leq\varphi$nazywa się warunkiem samohamowności klina

Zadanie 6

Kula o promieniu r i ciężarze Q spoczywa na równi pochyłej. Jaki ma być kąt α aby kula nie stoczyła się po równi? Ramie tarcia tocznego wynosi f.





$$M_A=0$$
$$Q\cdot r\sin\alpha-N\cdot f=0$$

W przypadku granicznym ciało się nie zsunie gdy:

$$M_A(Q)\leq N\cdot f$$
$$Q\cdot r\sin\alpha\leq N\cdot f$$

Wartość reakcji N znajdujemy z warunków równowagi:

$$\sum F_y = 0$$
$$-Q\cos\alpha + N = 0$$
$$N = Q\cos\alpha$$

Podstawiając do warunku granicznego otrzymamy:

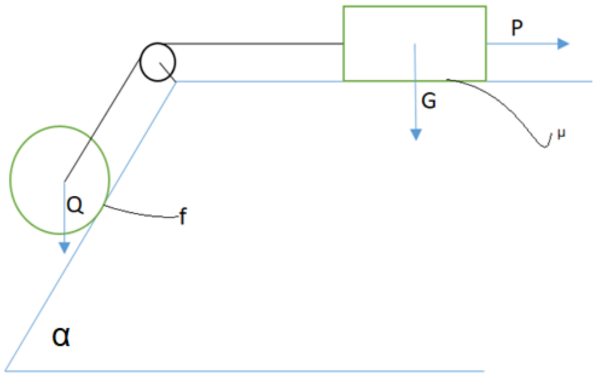
$$Q \cdot r\sin\alpha \leq f \cdot Q\cos\alpha$$

Stąd otrzymamy:

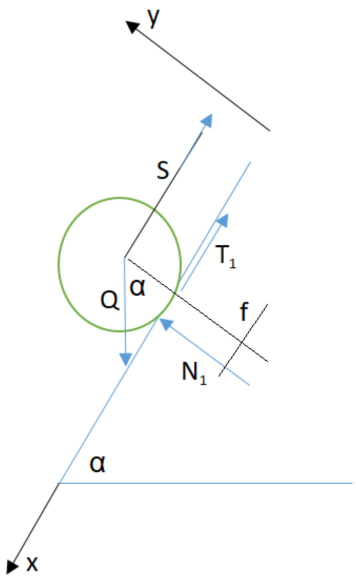
$$tg\alpha \leq \frac{f}{r}$$

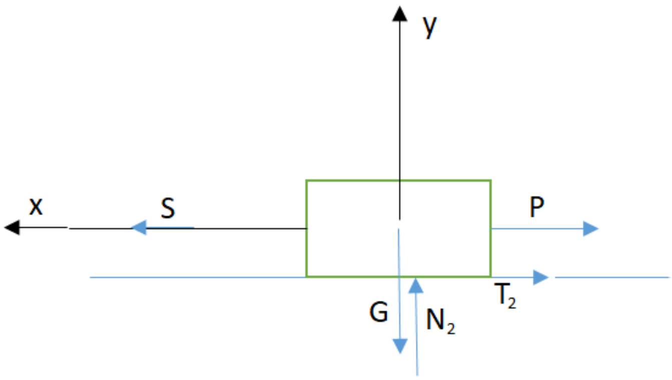
Zadanie 7

Obliczyć minimalną siłę P jaką trzeba przyłożyć do ciała o ciężarze G aby układ był w spoczynku. Współczynnik tarcia poślizgowego wynosi μ, a tarcia tocznego f. Ciała połączone są liną przerzuconą przez nieważki krążek. Dane: Q, r, G, α, μ, f.



Ponieważ krążek jest nieważki siła w linie po obu stronach krążka jest taka sama. Rozcinamy myślowo linę i rysujemy rozkład sił oddzielnie dla walca o ciężarze Q i dla ciała o ciężarze G.





Siła N_1 jest przesunięta o f w kierunku ruchu (dla walca o ciężarze Q)

Równania równowagi dla walca:

$$\sum F_x = 0$$
$$-S - T_1 + Q\sin\alpha = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$N_1 - Q\cos\alpha = 0$$
$$\sum M_o = 0$$
$$T \cdot r - N_1 \cdot f = 0$$

Równania równowagi dla ciała o ciężarze G:

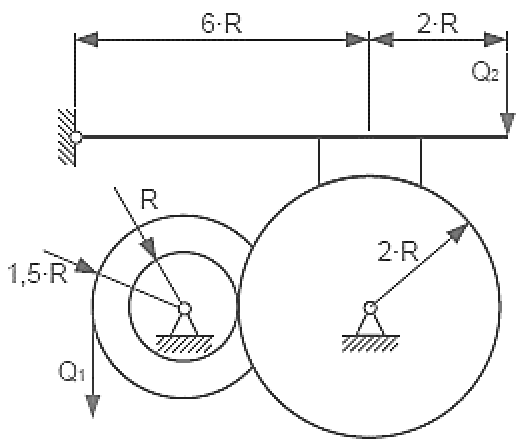
$$\sum F_x = 0$$
$$S - P - T_2 = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$N_2 - G = 0$$
$$\sum M_o = 0$$
$$T_2 = \mu N_2$$

6 równań i 6 niewiadomych: S, T_1, N_1, T_2, N_2, P

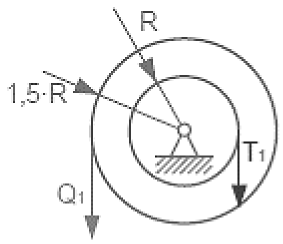
$$N_2 = G$$
$$N_1 = Q\cos\alpha$$
$$T_1 = N_1 \frac{f}{r} = Q\frac{f}{r}\cos\alpha$$
$$S = Q\sin\alpha - T_1 = Q\left(\sin\alpha - \frac{f}{r}\cos\alpha\right)$$
$$T_2 = \mu \cdot N_2 - \mu \cdot G$$
$$P = S - T_2 = Q\left(\sin\alpha - \frac{f}{r}\cos\right) - \mu \cdot G$$

Zadanie 8

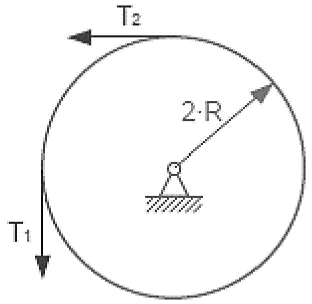
Dla układu pokazanego na rysunku obliczyć minimalną siłę Q_2 niezbędną do utrzymania układu w stanie spoczynku. Dane: R, Q_1, μ



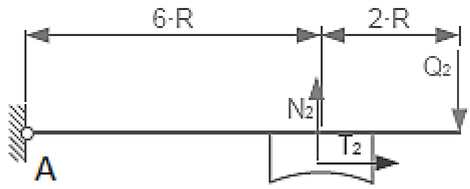
Dzielimy układ na części uwalniamy układ od więzów i wprowadzamy wszystkie siły i reakcje:



$$\sum M_o = 0$$
$$1{,}5R \cdot Q_1 - R \cdot T_1 = 0$$
$$T_1 = 1{,}5Q$$



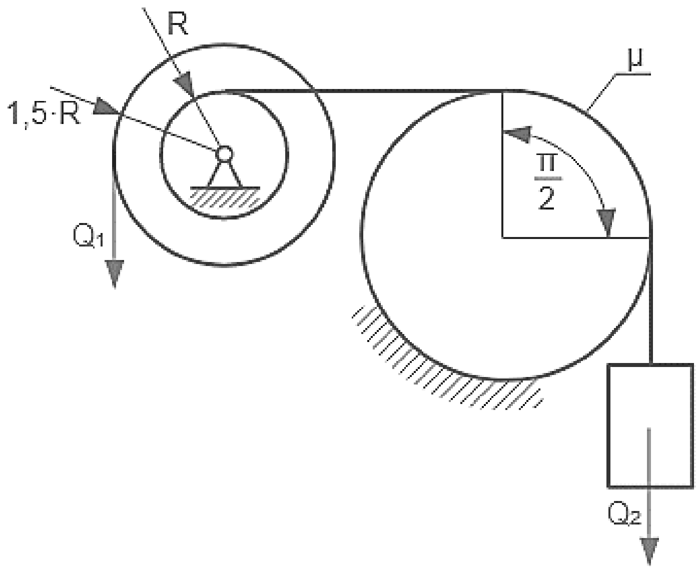
$$\sum M_o = 0$$
$$-2RT_2 + 2R \cdot T_1 = 0$$
$$T_2 = T_1$$
$$T_2 = 1{,}5Q$$

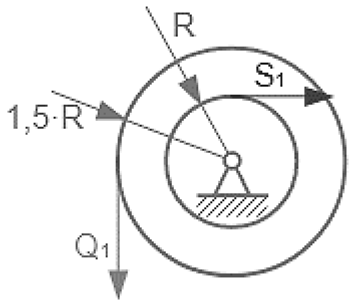


$$\sum M_A = 0$$
$$\frac{N_2 6R}{\mu} - Q_2 8R = 0$$
$$Q_2 = \frac{T_2 3}{\mu 4}$$

Zadanie 9

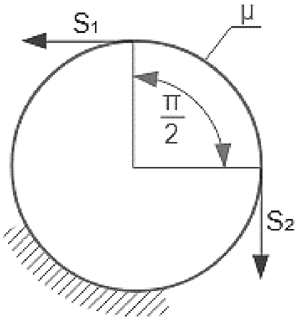
Dla układu pokazanego na rysunku obliczyć ciężar Q_2 niezbędny do utrzymania układu w stanie spoczynku. Dane: Q_1, μ





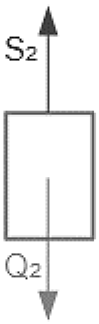
$$\sum M_o = 0$$
$$1.5R \cdot Q_1 - R \cdot S_1 = 0$$
$$S_1 = 1{,}5Q_1$$

W przypadku układu w którym mamy do czynienia z nierozciągliwą liną przerzuconą przez bloczek możemy zapisać zależność:



$$S_1 e^{\mu \cdot \frac{\pi}{2}} - S_2 = 0$$

$$S_2 = S_1 e^{\mu \cdot \frac{\pi}{2}}$$



$$\sum F_y = 0$$

$$Q_2 - S_2 = 0$$

$$Q_2 = S_2$$