Ćwiczenie 16

WYZNACZANIE NAPRĘŻEŃ W HAKU

Celem ćwiczenia jest utrwalenie wiadomości teoretycznych dotyczących teorii stanu naprężeń w pręcie krzywym jednocześnie zginanym i rozciąganym. Przedstawiona zostanie metoda identyfikacji stanu naprężeń i przemieszczenia pionowego, oparta na rozważaniach teoretycznych i na pomiarach tensometrycznych [5]. Szerszy zakres wiadomości na ten temat podany jest w książce [8] w rozdziale „Pręty krzywe".

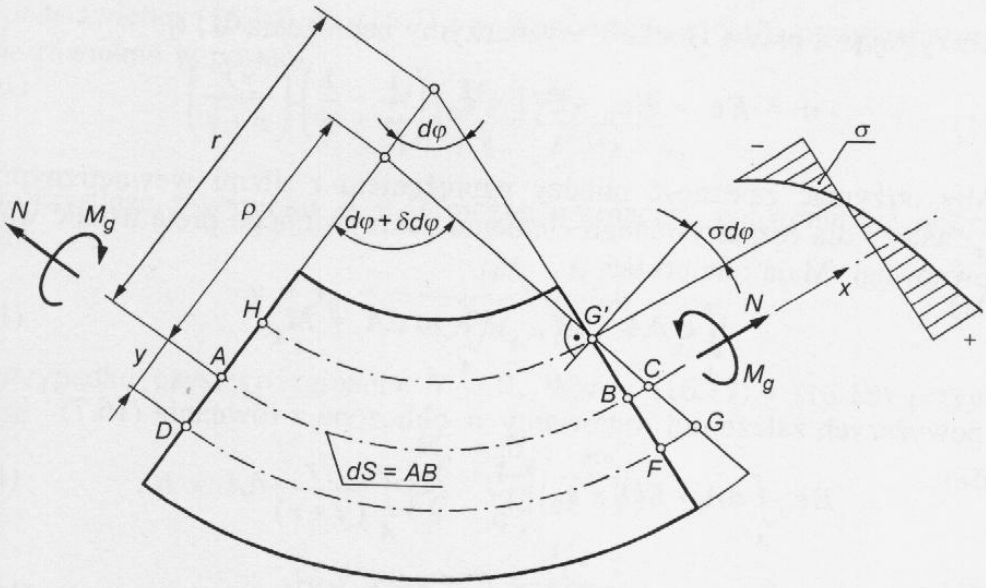
16.1. WPROWADZENIE

Weźmy pod uwagę element o długości ds pręta (haka) krzywego o promieniu r (rys. 16.1). Punkt G' leży na obojętnej osi HG' pręta zakrzywionego. Długość włókna wzdłuż osi pręta po odkształceniu wynosi AC, tj.

$$AC = ds + \Delta ds = ds(1 + \varepsilon_0) = \rho(d\varphi + \delta d\varphi), \tag{16.1}$$

gdzie: ρ – promień krzywizny,

ε_0 – wydłużenie właściwe włókna wzdłuż osi pręta.



Rys. 16.1. Element pręta o długości ds

Długość dowolnego włókna przed odkształceniem jest

$$DF = (r + y)\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

zaś po odkształceniu

$$DG = DF + FG = (r + y)\mathrm{d}\varphi + \varepsilon(r + y)\mathrm{d}\varphi = (1 + \varepsilon)(r + y)\,\mathrm{d}\varphi\,, \tag{16.2}$$

gdzie: $\varepsilon = \varepsilon(y)$ – wydłużenie właściwe,
y – odległość włókna od osi pręta.

Z założenia, że przekrój haka pozostaje płaski po obciążeniu, wynika

$$DG = (\rho + y)(\mathrm{d}\varphi + \delta\,\mathrm{d}\varphi)\,. \tag{16.3}$$

Po przyrównaniu zależności (16.2) i (16.3) otrzymamy

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)(\mathrm{d}\varphi + \delta\,\mathrm{d}\varphi)}{(r + y)\mathrm{d}\varphi} - 1\,. \tag{16.4}$$

Uwzględniając we wzorze (16.4), że $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}s/r$ oraz wyznaczając z (16.1)

$$\mathrm{d}\varphi + \delta\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}s(1 + \varepsilon_0)}{\rho}\,,$$

uzyskamy

$$\varepsilon = (1 + \varepsilon_0)\frac{r(\rho + y)}{(r + y)\rho} - 1\,, \tag{16.5}$$

przy czym wielkości ρ i ε_0 nie są na razie znane. Wzór (16.5) można przekształcić do postaci

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + (1 + \varepsilon_0)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{yr}{r + y}\right). \tag{16.6}$$

Korzystając z prawa Hooke'a wyznaczymy naprężenia σ, tj.

$$\sigma = E\varepsilon = E\varepsilon_0 + E(1 + \varepsilon_0)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{yr}{r + y}\right). \tag{16.7}$$

Aby otrzymać zależność między naprężeniem i siłami wewnętrznymi N i M_g, należy dla rozpatrywanego elementu zakrzywionego pręta ustalić warunki równowagi. Mają one postać

$$\int_A \sigma\,\mathrm{d}A = N\,, \qquad \int_A y\sigma\,\mathrm{d}A = M_g\,. \tag{16.8}$$

Do powyższych zależności wstawiamy σ obliczone z równania (16.7)

$$E\varepsilon_0\int_A \mathrm{d}A + E(1 + \varepsilon_0)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right)\int_A \frac{yr}{(y + r)}\mathrm{d}A = N\,, \tag{16.9}$$

$$E\varepsilon_0\int_A y\,\mathrm{d}A + E(1 + \varepsilon_0)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right)\int_A \frac{ry^2}{(y + r)}\mathrm{d}A = M_g\,, \tag{16.10}$$

gdzie: A – pole przekroju poprzecznego haka.

Z uwagi na to, że osie z, y są centralnymi osiami bezwładności przekroju, więc całki z wyrażeń o nieparzystych potęgach zerują się, tj.

$$\int_A y\,\mathrm{d}A = \int_A y^3\mathrm{d}A = \int_A y^5\mathrm{d}A = \ldots = 0\,. \tag{16.11}$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$I_z' = \int_A \frac{ry^2}{(y + r)}\,\mathrm{d}A\,. \tag{16.12}$$

Całkę $\int_A \frac{ry}{(y + r)}\,\mathrm{d}A$ przekształcamy do postaci

$$\int_A \frac{ry}{(y + r)}\,\mathrm{d}A = \int_A \frac{y(r + y) - y^2}{(r + y)}\,\mathrm{d}A = -\frac{I_z'}{r}\,. \tag{16.13}$$

Po podstawieniu zależności (16.12) i (16.13) do (16.9) i (16.10) otrzymamy układ równań, w którym niewiadomymi są ε_0 oraz ρ

$$rEA\,\varepsilon_0 - rE(1 + \varepsilon_0)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right)I_z' = Nr\,, \tag{16.14}$$

$$E(1 + \varepsilon_0)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right)I_z' = M_g\,. \tag{16.15}$$

Rozwiązując powyższy układ równań mamy

$$\varepsilon_0 = \frac{N}{EA} + \frac{M_g}{rEA}\,. \tag{16.16}$$

Po podstawieniu (16.16) do (16.7) i wykorzystaniu (16.15) otrzymamy ostatecznie równanie w postaci

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_g}{rA} + \frac{M_g}{I_z'}\frac{ry}{(r + y)}\,. \tag{16.17}$$

Korzystając z warunku $\sigma = 0$ można wyznaczyć położenie osi obojętnej, czyli

$$y = y_0 = -\frac{(M_g + Nr)rI_z'}{Ar^2M_g + (Nr + M_g)I_z'}\,. \tag{16.18}$$

W przypadku czystego zginania $N = 0$. Wzory (16.17) i (16.18) przyjmują postać

$$\sigma = \frac{M_g}{rA} + \frac{M_g}{I_z'}\frac{ry}{(r + y)}\,, \tag{16.19}$$

$$y = y_0 = -\frac{I_z'r}{Ar^2 + I_z'}\,. \tag{16.20}$$

Kłopotliwe obliczenie I'_z można uprościć poprzez rozwinięcie składnika funkcji podcałkowej $r/(r+y)$ w szereg potęgowy, czyli

$$I'_z = \int_A \frac{r}{(r+y)} y^2 \, \mathrm{d}A = \int_A \left(1 - \frac{y}{r} + \frac{y^2}{r^2} - \frac{y^3}{r^3} + \frac{y^4}{r^4} - \dots \right) y^2 \, \mathrm{d}A \,. \tag{16.21}$$

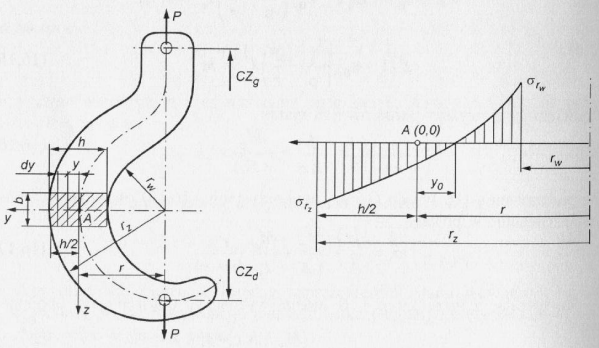
Wykorzystując (16.11), zależność (16.21) przyjmuje postać

$$I'_z = I_z + \frac{1}{r^2} \int_A y^2 \, \mathrm{d}A + \frac{1}{r^4} \int_A y^6 \mathrm{d}A + \frac{1}{r^6} \int_A y^8 \mathrm{d}A + \dots \,, \tag{16.22}$$

przy czym dla przekroju prostokątnego haka

$$I_z = \frac{b h^3}{12} \,,$$

gdzie: h – szerokość przekroju poprzecznego haka,
b – grubość przekroju poprzecznego haka.



Rys. 16.2. Rozkład naprężeń w przekroju haka

Naprężenia we włóknach skrajnych (rys. 16.2) wyznaczymy ze wzoru (16.17)

$$A = b h \,, \quad N = P \,, \quad P = \frac{\pi d^2}{4} p \,, \quad M_g = -P r \,,$$

gdzie: p – ciśnienie w cylindrze siłownika hydraulicznego,
d – średnica tłoka siłownika hydraulicznego.

Dla $y = -\dfrac{h}{2} \;\rightarrow\; \sigma_{r_w} = \dfrac{P h r^2}{I'_z (2r - h)}$.

Dla $y = \dfrac{h}{2} \;\rightarrow\; \sigma_{r_z} = -\dfrac{P h r^2}{I'_z (2r + h)}$.

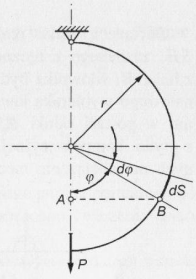
Wielkość I'_z obliczamy z zależności (16.22), przyjmując trzy pierwsze wyrazy szeregu. Po scałkowaniu uzyskamy

$$I'_z = \frac{b h^3}{12} \left[1 + \frac{3}{20} \left(\frac{h}{r} \right)^2 + \frac{3}{112} \left(\frac{h}{r} \right)^4 + \frac{3}{576} \left(\frac{h}{r} \right)^6 \right] \tag{16.23}$$

lub z zależności (16.12)

$$I'_z = r \int_{-0,5h}^{0,5h} \frac{y^2 b}{(r+y)} \mathrm{d}y = b r^2 \left(r \ln \frac{2r+h}{2r-h} - h \right). \tag{16.24}$$

Zbadajmy przemieszczenie pręta zakrzywionego w kształcie półokręgu o promieniu r, obciążonego na końcu siłą P (rys. 16.3). Należy więc rozpatrzyć nie tylko wpływ momentu gnącego M_g, ale też i siły normalnej N. Nie uwzględniamy dodatkowego uginania się pręta pod wpływem jego ciężaru własnego.



Rys. 16.3. Obciążenie pręta zakrzywionego

Zależność na energię wewnętrzną w elemencie $\mathrm{d}S$ ma postać

$$\mathrm{d}V = \int_A \frac{\sigma^2}{2E} (r+y) \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}A = \frac{r \, \mathrm{d}\varphi}{2E} \int_A \sigma^2 \frac{(r+y)}{r} \mathrm{d}A \,. \tag{16.25}$$

Wykorzystując zależności (16.11) i (16.12) otrzymamy

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S} = \frac{\left[N + (M_g/r) \right]^2}{2EA} + \frac{M_g^2}{2EI'_z} \,. \tag{16.26}$$

Zgodnie z twierdzeniem Castigliano przemieszczenie pionowe punktu przyłożenia siły P możemy wyznaczyć jako pochodną wewnętrznej energii potencjalnej pręta względem działającej siły P, czyli

$$\begin{aligned} f &= \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left[\int_0^{\pi} \frac{(N + M_g/r)^2}{2EA} r \, \mathrm{d}\varphi + \int_0^{\pi} \frac{M_g^2}{2EI'_z} r \, \mathrm{d}\varphi \right] = \\ &= \frac{1}{EA} \int_0^{\pi} \left(N + \frac{M_g}{r} \right) \left(\frac{\partial N}{\partial P} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_g}{\partial P} \right) r \, \mathrm{d}\varphi + \frac{1}{EI'_z} \int_0^{\pi} M_g \frac{\partial M_g}{\partial P} r \, \mathrm{d}\varphi \,. \end{aligned} \tag{16.27}$$

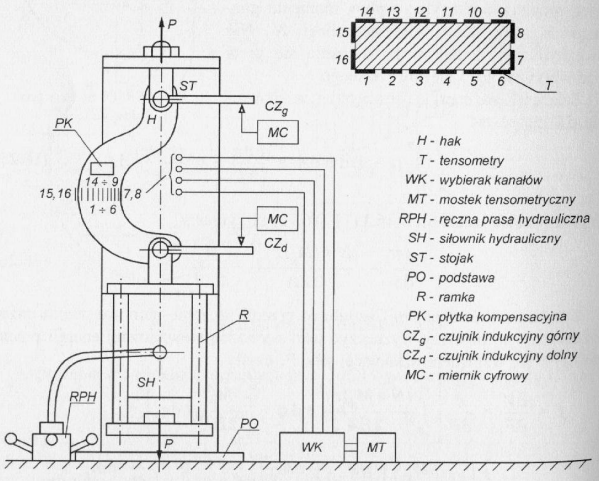
Po uwzględnieniu w wyrażeniu (16.27), że moment gnący $M_g = -Pr\sin\varphi$ i siła normalna $N = P\sin\varphi$, otrzymamy

$$f = \frac{\pi P r}{2E}\left[\frac{4}{A} + \frac{r^2}{I_z'}\right]. \tag{16.28}$$

Ostatecznie wynik obliczeń teoretycznych można zweryfikować poprzez pomiar przemieszczenia górnej i dolnej części haka.

16.2. OPIS STANOWISKA (RYS. 16.4)

Obciążenie haka realizowane jest za pomocą siłownika hydraulicznego SH, zasilanego z ręcznej prasy hydraulicznej RPH. Stanowisko składa się z haka H, siłownika hydraulicznego SH, stojaka ST, podstawy PO, wielokanałowego wybieraka kanałów WK, mostka tensometrycznego MT, mechanizmu w postaci ramki R, przenoszącego obciążenie z siłownika na hak oraz z płytki kompensacyjnej, pozwalającej wyeliminować wpływ czynników innych niż obciążenie mechaniczne. Czujniki CZ_g, CZ_d pozwalają na określe-



Rys. 16.4. Schemat stanowiska

nie względnego przemieszczenia pionowego haka w miejscu przyłożonej siły rozciągającej P. Wskazania wartości przemieszczeń można odczytać na miernikach cyfrowych MC. Mając wartości ε w poszczególnych punktach pomiarowych możemy obliczyć naprężenia w tych punktach ze wzoru [20, 24]

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{(W - W_0)k_m}{k_t}\cdot 0{,}001, \tag{16.29}$$

gdzie: W_0 – wskazania mostka w stanie nieobciążonym ('0') [‰],
W – wskazania mostka w stanie obciążonym ('1') [‰],
k_m – stała mostka,
k_t – stała tensometru.

Dane: $k_m = 2{,}4$; $k_t = 2{,}53$; $b = 15$ mm, $h = 60$ mm, $r = 90$ mm, $d = 40$ mm.

16.3. PRZEBIEG ĆWICZENIA

1. Sprawdzić pewność połączeń elektrycznych.
2. Dokonać odczytu stanu '0' (przed obciążeniem) każdego punktu pomiarowego.
3. Dla podanego ciśnienia w siłowniku przez prowadzącego ćwiczenie dokonać obciążenia haka.
4. W kolejności naklejenia tensometrów dokonać odczytów wskazań mostka w stanie '1' (obciążenie).
5. Dokonać odczytów wskazań przemieszczeń.

16.4. ZAWARTOŚĆ SPRAWOZDANIA

Sprawozdanie powinno zawierać:

1. Szkic przekroju haka z naklejonymi tensometrami.
2. Protokół pomiarów wg punktów 2, 3, 4, „Przebiegu ćwiczenia".
3. Obliczenia wartości naprężeń w przekroju haka na podstawie wyników eksperymentalnych.
4. Obliczenia na podstawie zależności teoretycznych wartości naprężeń w przekroju haka oraz jego sprężystego odkształcenia.
5. Porównanie wartości I_z' obliczonej ze wzorów (16.23) i (16.24).
6. Porównanie otrzymanych wyników doświadczalnych i teoretycznych oraz ich skomentowanie.

Literatura do ćwiczenia: [5], [8], [20], [24]